BASES MATHÉMATIQUES POUR LA MESURE DES PHÉNOMÈNES BIOLOGIQUES

Bruno Saussereau

Laboratoire de Mathématiques de Besançon

Diaporama des cours du jeudi 06/09/12 (pages 1–24), du vendredi 07/09/12 (pages 25–54) et du vendredi 14/09/12 (pages 55–94).

Des fautes de frappe ont été corrigées en rouge aux pages 14, 34, 47, 48, 51 et 53.

PACES & APEMR UE4 (2012-2013)

Dans toute cette section, f désigne une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

DEFINITION

Le domaine de définition de f, noté $\mathcal{D}_f$, est l'ensemble des valeurs x pour lesquelles $f(x)$ existe. C'est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.

Exemple

- *La fonction* $x \mapsto x^2$ *a pour ensemble de définition* $\mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$.
- *La fonction* $x \mapsto \sqrt{x+4}$ *a pour ensemble de définition* $[-4; +\infty[$.
- *La fonction* $x \mapsto \dfrac{1}{2x-4}$ *a pour ensemble de définition* $\mathbb{R} \setminus \{2\} =]-\infty; 2[\cup]2; +\infty[$.

Remarque

On peut aussi étudier une fonction :

- *sur un sous ensemble (généralement un intervalle) de* $\mathcal{D}_f$ *;*
- *sur un ensemble de définition dit pratique qui correspond aux valeurs de x possibles dans le domaine expérimental.*

Soit f une fonction de domaine de définition $\mathcal{D}_f$. On dira que f est

- paire si pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $f(-x) = f(x)$,
- impaire si pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $f(-x) = -f(x)$,
- périodique de période $T > 0$ si pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $f(x+T) = f(x)$,
- croissante si pour tout $x \leq x'$ (x et x' dans $\mathcal{D}_f$), $f(x) \leq f(x')$,
- décroissante si pour tout $x \leq x'$ (x et x' dans $\mathcal{D}_f$), $f(x) \geq f(x')$,
- majorée s'il existe M tel que $f(x) \leq M$ pour tout $x \in \mathcal{D}_f$,
- minorée s'il existe m tel que $m \leq f(x)$ pour tout $x \in \mathcal{D}_f$,
- bornée s'il existe M tel que $|f(x)| \leq M$ pour tout $x \in \mathcal{D}_f$ (bien remarquer que $|f(x)| \leq M$ peut s'écrire de manière équivalente $-M \leq f(x) \leq M$).

DEFINITION

La fonction réciproque de f est la fonction (s'il elle existe) notée f^{-1} qui vérifie

$$y = f(x)\ ,\quad x \in \mathcal{D}_f \Longleftrightarrow x = f^{-1}(y)\ ,\quad y \in f(\mathcal{D}_f)\ .$$

Remarque

- *Si f est croissante, alors f^{-1} est croissante.*
- *La fonction logarithme népérien* $\ln$ *définie sur* $]0; +\infty[$ *est la fonction réciproque de* $\exp$ *définie sur* $\mathbb{R}$.

Représentation graphique

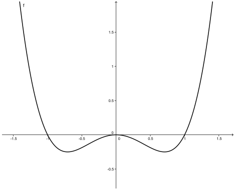
Definition

La courbe représentative de f (noté $\mathcal{C}_f$) est l'ensemble des couples $(x;f(x))$ pour x appartenant à $\mathcal{D}_f$.

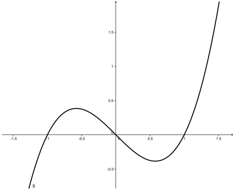
Propriété

Si la fonction f est paire, alors $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées (droite d'équation $y = 0$).
Si la fonction f est impaire, $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'origine (le point de coordonnées $(0;0)$)

EXEMPLES



courbe représentative de $f : x \mapsto x^4 - x^2$



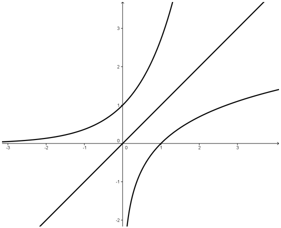
courbe représentative de $g : x \mapsto x^3 - x$

PROPRIÉTÉ

Les courbes représentatives de deux fonctions réciproques sont symétrique par rapport à la droite d'équation $y = x$ (appelée première bissectrice).

Exemple

Courbe représentative des fonctions ln *et* exp *:*



LIMITE FINIE

DEFINITION

- Soit f une fonction définie sur un intervalle $I = [a;b]$ et soit $x_0 \in]a;b[$. On dit que f a une limite finie L en x_0 si pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\delta > 0$ tel que lorsque x est dans I et $|x - x_0| \leq \delta$, alors $|f(x) - L| \leq \varepsilon$. On note $L = \lim_{x \longrightarrow x_0} f(x)$.
- Soit f une fonction définie sur un intervalle $I = [a; +\infty[$. On dit que f a une limite finie L en $+\infty$ si pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $S > 0$ tel que lorsque x est dans I et $x \geq S$, alors $|f(x) - L| \leq \varepsilon$. On note $L = \lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x)$.

PROPRIÉTÉ

Lorsque la limite existe, elle est unique.

Exemple

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 5x^{1,3} + x^{-7}}{x^2 - x^{-34}} = \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2\ .$$

LIMITE INFINIE

DEFINITION

- Soit f une fonction définie sur un intervalle $I = [a;b]$ et soit $x_0 \in]a;b[$. On dit que f a une limite infinie ($+\infty$ pour fixer les idées) en x_0 si pour tout réel $A > 0$, il existe un réel $\delta > 0$ tel que lorsque x est dans I et $|x - x_0| \leq \delta$, alors $f(x) \geq A$. On note $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$.
- Soit f une fonction définie sur un intervalle $I = [a; +\infty[$. On dit que f a une limite infinie ($+\infty$ pour fixer les idées) en $+\infty$ si pour tout réel $A > 0$, il existe un réel $B > 0$ tel que lorsque x est dans I et $x \geq B$, alors $f(x) \geq A$. On note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Exemple

$$\lim_{x \to 12^+} \frac{1}{\sqrt{x - 12}} = +\infty \; .$$

PROPRIÉTÉS DES LIMITES

PROPRIÉTÉ

- *Si pour tout* x *(où les fonctions sont définies)* $f(x) \leq g(x)$*, alors* $\lim f(x) \leq \lim g(x)$.
- *Si* $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = L_f$ *et* $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} g(x) = L_g$ *(avec* x_0 *qui peut être* $\pm\infty$*), alors :*
  - *la limite de la somme est la somme des limites quand* L_f *et* L_g *sont finies, ou infinies de même signe ;*
  - *la limite du produit est le produit des limites quand* L_f *et* L_g *sont finies, ou infinies de même signe ;*
  - *la limite du quotient de* f *par* g *est le quotient des limites quand* L_f *et* $L_g \neq 0$ *sont finies ;*
  - *et on a aussi les règles suivantes :*
    - $L_f + \infty = +\infty$ *pour* $L_f \neq -\infty$ *;*
    - $L_f \times (\pm\infty) = \pm\infty$ *pour* $L_f > 0$ *;*
    - $L_f \times (+\infty) = -\infty$ *pour* $L_f < 0$ *;*
    - $L_f/(\pm\infty) = 0$ *pour* $L_f \neq \pm\infty$.

Branches infinies

Intuitivement, la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f admet une branche infinie lorsqu'un point de cette courbe peut s'éloigner à l'infini.

Definition (Asymptotes parallèles aux axes)

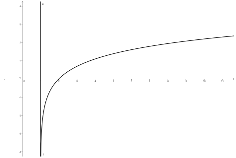
- La courbe $\mathcal{C}_f$ admet pour asymptote la droite d'équation $x = x_0$ (droite parallèle à l'axe des ordonnées) si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$.
- La courbe $\mathcal{C}_f$ admet pour asymptote la droite d'équation $y = L$ (droite parallèle à l'axe des abscisses) si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = L$.

EXEMPLE

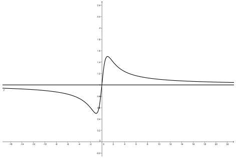
$\diamond$ Pour la fonction f définie par $f(x) = \ln(x-1)$, avec $\mathcal{D}_f =]1; +\infty[$, on a $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$ donc la droite $x = 1$ est une asymptote verticale de $\mathcal{C}_f$.

$\diamond$ Pour la fonction g définie par $g(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x^2+1}$, avec $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}$, on a $g(x) = 1 + \dfrac{x}{x^2+1}$ et donc $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 1$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = 1$.

La droite $y = 1$ est donc une asymptote horizontale (en $+\infty$ et $-\infty$) de $\mathcal{C}_g$.



courbe représentative de $f : x \mapsto \ln(x-1)$



courbe représentative de $g : x \mapsto \frac{x^2+x+1}{x^2+1}$

Asymptote oblique

Une asymptote oblique peut apparaître que lorsque $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) \pm \infty$.

Definition (Asymptote oblique)

La courbe $\mathcal{C}_f$ admet pour asymptote oblique la droite d'équation $y = mx + p$ si

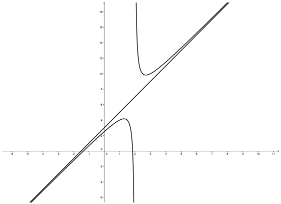
$$\lim_{x \to \pm\infty} \left[f(x) - (mx + p) \right] = 0.$$

Remarque

- *Pour déterminer m on remarque que* $m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$.
- *Pour déterminer p on remarque que* $p = \lim_{x \to \pm\infty} \left[f(x) - mx \right]$.

EXEMPLE

Soit $f : x \mapsto \dfrac{2x^2 - x - 5}{x - 2}$. On a $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ donc la recherche d'une asymptote oblique est justifiée (ce n'est cependant pas sur qu'il en existe une !) Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 2$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[f(x) - 2x\right] = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x - 5}{x - 2} = 3$, on en déduit que la droite d'équation $y = 2x + 3$ est asymptote oblique de $\mathcal{C}_f$.

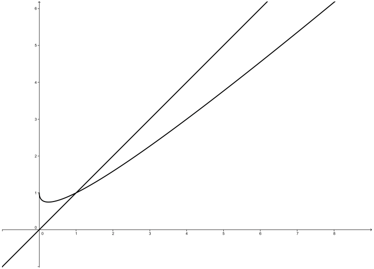


BRANCHES PARABOLIQUES

- Si $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = m$ et $\lim_{x \to \pm\infty} \left[f(x) - mx \right] = \pm\infty$, alors on dit que la courbe représentative de f admet une branche parabolique de direction (ou d'axe) $y = mx$.
- Quand $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$, on dit que la courbe admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées

Exemple

- *La courbe représentative de la fonction* ln *admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.*
- *La courbe représentative de la fonction g définie sur $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}$ par $g(x) = 1 + x - \sqrt{x}$ admet une branche parabolique de direction (ou d'axe) $y = x$.*



CONTINUITÉ EN UN POINT

DEFINITION
Une fonction f définie sur $I = [a;b]$ est

- continue en $x_0 \in]a;b[$ si $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$;
- continue à droite en $x_0 \in [a;b[$ si $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$;
- continue à gauche en $x_0 \in]a;b]$ si $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

PROPRIÉTÉ
Si $x_0 \in]a;b[$, f est continue en x_0 si et seulement si elle est continue à gauche ET à droite en x_0.

Remarque
Une fonction f peut être discontinue en x_0 soit parce que :

- *elle n'est pas définie en x_0,*
- *la limite à droite en x_0 est différente de la limite à gauche en x_0.*

Continuité dans un intervalle

- f est continue dans l'intervalle $]a;b[$ si elle est continue en tout point x tel que $a < x < b$.
- f est continue dans l'intervalle $[a;b]$ si elle est continue en tout point x tel que $a < x < b$ et est continue à droite en a et à gauche en b.
- Soit f est définie et continue dans $[a;b]$. Si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes opposés, alors il existe $x_0 \in [a;b]$ tel que $f(x_0) = 0$.

DEFINITION (DÉRIVÉE EN UN POINT)

Soit f une fonction définie dans $]a;b[$ contenant x_0, on appelle dérivée de f au point x_0 la limite (si elle existe) $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ que l'on note $f'(x_0)$. On écrit aussi

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \, .$$

Lorsque cette limite existe, on dit que f est dérivable en x_0.

PROPRIÉTÉ

- *Si f est dérivable en x_0 alors f est continue en x_0.*
  La réciproque est fausse. En effet, la fonction $f : x \mapsto |x|$ est continue en 0 mais n'est pas dérivable en 0 car

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(0 + h) - f(0)}{h} = 1 \neq -1 = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(0 + h) - f(0)}{h} \, .$$

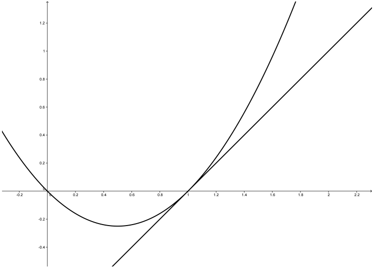
- *Si f est dérivable en x_0, alors la droite d'équation $y = f(x_0) + f'(x_0) \times (x - x_0)$ est tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ en x_0.*

EXEMPLE

Pour la fonction f définie par $f(x) = x^2 - x$, on a

$$f'(1) = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - x}{x - 1} = \lim_{x \to 1} x = 1$$

et donc la droite d'équation $y = x - 1$ est tangente à $\mathcal{C}_f$ en 1.



PROPRIÉTÉ

- *Si f est dérivable et f' positive, alors f est croissante.*
- *Si f est dérivable et f' négative, alors f est décroissante.*
- *Si f est deux fois dérivable et f'' positive, alors f est dite convexe (exemple $x \mapsto x^2$).*
- *Si f est deux fois dérivable et f'' négative, alors f est dite concave (exemple $x \mapsto -x^2$).*
- *Si f est deux fois dérivable, $f''(x_0) = 0$ en changeant de signe, alors on dit que f a un point d'inflexion en x_0 (changement de concavité).*

PROPRIÉTÉ (OPÉRATIONS ET DÉRIVÉES)

- $(f+g)' = f' + g'$
- $(fg)' = f'g + fg'$
- $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$ *en tout point x tel que $g(x) \neq 0$*
- $(g \circ f)'(x) = \left[g(f)\right]'(x) = g'\left[f(x)\right] \times f'(x)$

DÉRIVÉES USUELLES

$\mathcal{D}_f$	$f(x)$	$\mathcal{D}_{f'}$	$f'(x)$	Commentaires
$\mathbb{R}$	C	$\mathbb{R}$	0	C est une constante réelle
$\mathbb{R}$	x	$\mathbb{R}$	1	
$\mathbb{R}$	x^n	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}	$n \in \mathbb{N}$
$[0; +\infty[$	$\sqrt{x}$	$]0; +\infty[$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	non dérivable en 0
$\mathbb{R}^*$	$\dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$-\dfrac{1}{x^2}$	
$\mathbb{R}^*$	$\dfrac{1}{x^n}$	$\mathbb{R}^*$	$-\dfrac{n}{x^{n+1}}$	$n \in \mathbb{N}$
$\mathbb{R}^+$	x^α	$\mathbb{R}^+$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\alpha \geq 1$
$\mathbb{R}^+$	x^α	$\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$0 < \alpha < 1$
$\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$	x^α	$\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\alpha < 0$

Dérivées usuelles (suite)

$\mathcal{D}_f$	$f(x)$	$\mathcal{D}_{f'}$	$f'(x)$	Commentaires
$\mathbb{R}^*$	$\ln(x)$	$\mathbb{R}^*$	$-\frac{1}{x}$	
$\mathbb{R}$	$\exp(x)$	$\mathbb{R}$	$\exp$	
$\mathbb{R}$	$a^x = \exp(x\ln(a))$	$\mathbb{R}$	$\ln(a) \times a^x$	$a > 0$
$\mathbb{R}$	$\sin(x)$	$\mathbb{R}$	$\cos(x)$	
$\mathbb{R}$	$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$-\sin(x)$	
$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\}$	$\tan(x)$	$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\}$	$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$	

LOGARITHME NÉPÉRIEN

DEFINITION

La fonction logarithme népérien, notée ln est la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{y} dy$.

PROPRIÉTÉ

La fonction ln *est une bijection de* $]0; +\infty[$ *sur* $\mathbb{R}$ *qui vérifie de plus :*

- $\ln'(x) = 1/x$ *et* $\ln(1) = 0$*,*
- $\ln(x) < 0$ *pour* $0 < x < 1$ *et* $\ln(x) > 0$ *pour* $x > 1$*,*
- $\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$*,* $\lim_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$*,*
- *pour tout* $\alpha > 0$ *on a* $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha} = 0$ *et* $\lim_{x \to 0^+} x^\alpha \ln(x) = 0$ *(on dit que cette une fonction à croissance lente),*
- *pour tout* x, y *strictement positifs,* $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$ *(on peut même définir le logarithme népérien comme l'unique fonction continue sur* $]0; +\infty[$ *qui vérifie cette propriété),*
- *si* f *est une fonction strictement positive et dérivable on a* $(\ln(f))' = f'/f$*.*

EXPONENTIELLE

DEFINITION

La fonction exponentielle notée exp ou $x \mapsto e^x$ est la fonction réciproque du logarithme népérien.

PROPRIÉTÉ

La fonction exp *est une bijection de* $\mathbb{R}$ *dans* $]0; +\infty[$ *qui vérifie de plus :*

- $y = \exp(x) \iff x = \ln(y)$ *(pour* $y > 0$*),*
- *pour tout* x *et* y *réels,* $e^{x+y} = e^x \times e^y$*,*
- $\exp' = \exp$ *et* $(\exp(f))' = f' \times \exp(f)$ *pour* f *une fonction dérivable,*
- *pour tout* $\alpha > 0$ *on a* $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\exp(x)}{x^\alpha} = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x \to -\infty} x^\alpha \exp(x) = 0$ *(on dit que cette une fonction à croissance rapide (en* $+\infty$*) et à décroissance rapide (en* $-\infty$*)),*
- *pour tout* $\alpha > 0$*, on a* $\ln(x) < x^\alpha \leq \exp(x)$ *pour* x *suffisamment grand.*

LOGARITHME DE BASE a

DEFINITION

Soit $a > 0$ et $a \neq 1$. La fonction logarithme de base a, notée $\log_a$ est la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$.

PROPRIÉTÉ

La fonction $\ln_a$ *vérifie :*

- $\log_a(a) = 1$ *et* $\log_e = \ln$
- *pour tout* x, y *strictement positifs,* $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$
- *si* f *est une fonction strictement positive et dérivable,* $(\log_a(f))' = \frac{1}{\ln(a)} \times \frac{f'}{f}$.

Remarque

- *Le logarithme décimal (de base 10) est souvent noté* log.
- *Grâce à un logartithme on peut parfois transformer les données observées pour qu'elles deviennent linéaires. On utilise alors des échelles logarithmiques pour graduer les axes du graphique.*

Voici les étapes de l'étude d'une fonction f :

1. détermination de son ensemble de définition $\mathcal{D}_f$,
2. symétrie afin de réduire le domaine d'étude,
3. continuité
4. dérivabilité
5. sens de variation,
6. concavité
7. comportement à l'infini
8. recherche des asymptotes,
9. tableau de variation,
10. courbe représentative.

EXEMPLE D'ÉTUDE DE FONCTION

On étudie la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x}{x - 1}$.

- Domaine de définition de f : $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
- La fonction est continue en tout point $x \neq 1$.
- Symétrie (elle permet éventuellement de réduire le domaine d'étude). Ici $f(-x) = \dfrac{x^2 + 2x}{-x - 2} \neq \pm f(x)$ la fonction f n'a donc aucune propriété de parité.
- Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, la recherche d'une asymptote oblique ou d'une branche parabolique est justifiée.
  - ◇ On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x - 2}{x - 1} = 1 := m$ et
  - ◇ $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[f(x) - mx \right] = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - 2x - x(x-1)}{x - 1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-x}{x - 1} = -1 := p$,
  - ◇ donc la droite d'équation $y = x - 1$ est asymptote oblique à la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f.

SUITE DE L'ÉTUDE DE $f : x \mapsto \frac{x^2-2x}{x-1}$

- Étude au point de discontinuité : on a
  - ♠ $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1 \ x>1} \dfrac{x^2-2x}{x-1} = -\infty$ (règle du quotient de limites $(-1)/0^+$) et
  - ♠ $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1 \ x<1} \dfrac{x^2-2x}{x-1} = +\infty$ (règle du quotient de limites $(-1)/0^-$).
  - ♠ La droite verticale d'équation $x = 1$ est donc asymptote.
- Sens de variation. Calculons la dérivée.
  - ♣ Pour $x \neq 1$ on a :

$$f'(x) = \left(\frac{x^2-2x}{x-1}\right)' = \frac{(2x-2)(x-1) - 1 \times (x^2-2x)}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x+2}{(x-1)^2} \, .$$

  - ♣ On met le numérateur sous "forme canonique" : $x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1$ et donc

$$f'(x) = \frac{(x-1)^2+1}{(x-1)^2} = 1 + \frac{1}{(x-1)^2} > 0 \, .$$

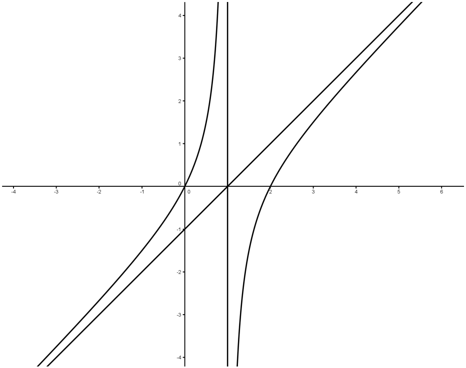
  - ♣ f est donc croissante sur $\mathcal{D}_f$.
- On remarque que $f''(x) = -\frac{2(x-1)}{(x-1)^4} = -\frac{2}{(x-1)^3} \neq 0$ et il n'y aura pas de point d'inflexion.

SUITE DE L'ÉTUDE DE $f : x \mapsto \frac{x^2-2x}{x-1}$

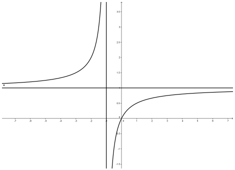
- Valeurs particulières : $f(0) = f(2) = 0$ et $f'(0) = f'(2) = 2$.
- Tableau de variation

x	$-\infty$		0			1			2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	2	$+$		$\|\|$		$+$	2	$+$	
					$+\infty$	$\|\|$					$+\infty$
				$\nearrow$		$\|\|$				$\nearrow$	
$f(x)$			0			$\|\|$			0		
		$\nearrow$				$\|\|$		$\nearrow$			
	$-\infty$					$\|\|$	$-\infty$				

Suite de l'étude de $f : x \mapsto \frac{x^2-2x}{x-1}$ (courbe représentative)



- Fonction linéaire : $x \mapsto ax + b$ (on parle aussi de fonction affine). De nombreuses lois physiques se traduisent par une fonction linéaire ou affine :
  - la distance d vérifie $d = v \times t$ (en tant que fonction du temps t),
  - loi d'Ohm : $U = Ri$.
- Fonction puissance $x \mapsto ax^n$ avec $n \in \mathbb{N}$ (loi de Bragg-Pierce en optique)
- Fonction inverse $x \mapsto \frac{a}{x}$. Elle intervient pour le calcul de la durée minimale du courant électrique requis pour provoquer artificiellement une contraction musculaire (chronaxie).
- Hyperbole équilatère $x \mapsto \frac{x}{x+a}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-a\}$. Le graphique suivant donne la courbe d'une telle hyperbole pour $a = 1$:



⇝ courbe de saturation de l'hémoglobine dans le sang,
⇝ vitesse de réaction enzymatique.

INTRODUCTION

- En thermodynamique, le volume V d'une masse donné de gaz dépend de deux grandeurs indépendantes :
  - la température T
  - la pression P
- Pour n moles de gaz, on a la formule

$$PV = nRT$$

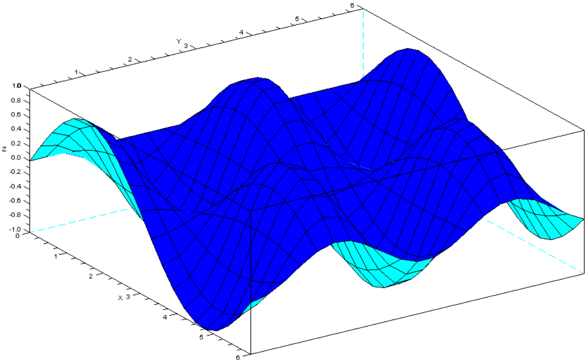
avec R est la constante universelle des gaz parfaits [1].

- On peut aussi écrire $V = nR \times \dfrac{T}{P}$
- À chaque valeur du couple $(T; P)$ correspond une seule valeur du volume V. On a donc une fonction notée f qui à $(T; P)$ associe le volume $nR \times \frac{T}{P}$. Ainsi $V = f(T, P)$ et f est une fonctions qui à deux variables (T, P) associe une unique valeur du volume V.

1. $R = 8,314\ J.K^{-1}.mol^{-1}$

- Connaissant la loi $V = nR \times \dfrac{T}{P}$, on peut mesurer de manière indirecte le volume V en mesurant la pression P et la température T.
- Connaissant les incertitudes sur les mesures de T et P il faut pouvoir mesurer les incertitudes sur V.
- Le calcul différentiel des fonctions de plusieurs variables va permettre de déterminer l'incertitude de mesure sur V.

- Exemple de représentation graphique d'une fonction de deux variables...



Courbe représentative de la fonction $(x; y) \mapsto \sin(x) \times \cos(2y)$ pour $(x; y) \in [0;2\pi]^2$

DEFINITION

Soit x et y deux variables, l'application f :

$$(x; y) \mapsto f(x, y)$$

définit une fonction réelle des deux variables x et y.
L'ensemble des couples $(x; y)$ pour lesquels $f(x, y)$ est définie constitue le domaine de définition (encore noté $\mathcal{D}_f$) de la fonction f.

Exemple

La fonction $(x; y) \mapsto f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y^2$ *est définie pour tout* x *et tout* y *réels. On note* $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$.

Exemple

- *Soit la fonction* $(x; y) \mapsto f(x, y) = \sqrt{4 - (x^2 + y^2)}$.
- *Cette fonction est définie pour tous les couples* $(x; y)$ *tels que* $x^2 + y^2 \leq 4$.
- *En identifiant les couples* $(x; y)$ *au point M de coordonnées* $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ *dans un repère orthonormé, trouver les couples* $(x; y)$ *vérifiant la condition* $x^2 + y^2 \leq 4$ *équivaut à trouver les points M du plan vérifiant* $OM^2 \leq 4$, *soit* $OM \leq 2$.
- $\mathcal{D}_f$ *est donc le disque de centre O et de rayon* 2.

DEFINITION

Fonction de n variables Soit $x_1, \ldots, x_n$ n variables réelles, l'application f :

$$(x_1; \ldots; x_n) \mapsto f(x_1, \ldots, x_n)$$

définit une fonction réelle des n variables $x_1, \ldots, x_n$.
L'ensemble des $n-$uplets $(x_1; \ldots; x_n)$ pour lesquels $f(x_1, \ldots, x_n)$ est définie constitue le domaine de définition (encore noté $\mathcal{D}_f$) de la fonction f.

Exemple

- *La fonction f de trois variables* $(x, y, z) \mapsto e^x \sin(x) \cos(z)$ *est une fonction des trois variables x, y et z qui est définie pour tout x, y et z réels. On note* $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^3$.
- *Pour la fonction g définie par*

$$g(x, y, z, t) = x^3 t^2 + y\cos(z) + \frac{1}{y(t-12)}$$

est définie pour $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}^*$, $z \in \mathbb{R}$ *et* $t \in \mathbb{R} \setminus \{12\}$.

Limite et continuité

Soit $(x; y) \mapsto f(x, z)$ une fonction de deux variables.

Definition (Limite)

En un point $(x_0; y_0) \in \mathcal{D}_f$ la limite de f au point $(x_0; y_0)$ est définie par (si elle existe)

$$\lim_{(x;y)\to(x_0;y_0)} f(x, y) = \lim_{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\to 0} f(x, y) .$$

Definition (Continuité)

Si en un point $(x_0; y_0) \in \mathcal{D}_f$ on a

$$\lim_{(x;y)\to(x_0;y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

alors f est dite continue en $(x_0; y_0)$.

Exemple

$\lim_{(x;y)\to(1;2)} -x^2 + 2y = 3.$

DÉRIVÉES PARTIELLES DU PREMIER ORDRE

Soit $(x;y) \mapsto f(x,y)$ définie sur $\mathcal{D}_f$ et soit $(x_0;y_0) \in \mathcal{D}_f$.

DEFINITION

- Si la fonction d'une variable $x \mapsto f(x,y_0)$ admet une dérivée au point x_0, on dit que la fonction de deux variables f admet une dérivée partielle.
- Si la fonction d'une variable $y \mapsto f(x_0,y)$ admet une dérivée au point y_0, on dit que la fonction de deux variables f admet une dérivée partielle.
- Si la fonction f admet des dérivées partielles par rapport à x et y, en tout point $(x;y)$ de $\mathcal{D}_f$, on dit que la fonction est dérivable.

◇ On note $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = f'_x(x,y)$ sa dérivée partielle par rapport à x : c'est la dérivée obtenue en fixant la variable y.

◇ On note $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = f'_y(x,y)$ sa dérivée partielle par rapport à y : c'est la dérivée obtenue en fixant la variable x.

EXEMPLES

Exemple

Soit la fonction f définie par $f(x,y) = 3x^3 + 4xy^3 - 6ye^x$. *On a*

- $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 9x^2 + 4y^3 - 6ye^x$
- $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 + 12xy^2 - 6e^x$

Exemple

Soit la fonction g définie par $g(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$. *On a pour* $(x;y) \neq (0;0)$

- $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$
- $\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Cas de trois variables et plus

Les notions précédentes s'étendent au cas de fonctions de n variables $x_1, ...x_n$.

Exemple

Pour la fonction f définie par $f(x,y,z) = (1+x^2+y^2)e^{xz}$ on a

- $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 2xe^{xz} + (1+x^2+y^2) \times z\, e^{xz}$
- $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 2ye^{xz}$
- $\dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = (1+x^2+y^2) \times xe^{xz}$

DÉRIVÉES PARTIELLES D'ORDRE SUPÉRIEUR

DEFINITION (CAS DE DEUX VARIABLES)

Pour une fonction $f\ (x,y) \mapsto f(x,y)$ dérivable sur son ensemble de définition $\mathcal{D}_f$, si $(x,y) \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $(x,y) \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ admettent à leur tour des dérivées partielles, alors en les dérivant on obtient les dérivées partielles d'ordre 2 et on note

- $(x,y) \mapsto \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)$
- $(x,y) \mapsto \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)$
- $(x,y) \mapsto \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)$
- $(x,y) \mapsto \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)$

Remarque

- *Si les dérivées partielles seconde admettent à leur tour des dérivées partielles, on définit ainsi des dérivées partielles d'ordre 3.*
- *Par exemple on définit* $(x, y) \mapsto \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y)\right)$.
- *On procède de même pour des ordres de dérivation supérieurs à trois.*

THÉORÈME (THÉORÈME DE SCHWARZ)

Si les dérivées partielles d'ordre 2 existent et sont continues, alors

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) .$$

Exemple

Soit la fonction f définie par $f(x, y) = x^2 + y^2$, *on a bien*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = 0 .$$

CAS DE TROIS VARIABLES

- Si $f : (x, y, z) \mapsto f(x, y, z)$ a des dérivées partielles qui sont admettent elles même des dérivées partielles, alors on peut aussi définir ses dérivées partielles d'ordre 2.
- Une telle fonction admet :
  - 3 dérivées partielles d'ordre 1,
  - 9 dérivées partielles d'ordre 2.
- Le théorème d'inversion de Schwarz reste valable quel que soit le nombre de variables pourvu que les dérivées partielles soient continues.

DEFINITION (NOTATIONS DE MONGE)

Soit f deux fois dérivables avec des dérivées partielles continues. Afin d'exprimer les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 on utilisera les notations suivantes :

- $p = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$
- $q = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$
- $r = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y)$
- $s = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)$
- $t = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y)$.

NOTION D'EXTREMUM

Soit f une fonction de deux variables définie sur son ensemble de définition $\mathcal{D}_f$.

DEFINITION

On dit que f admet un maximum relatif en $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}_f$ si

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$$

quand (x, y) est proche de (x_0, y_0).
On a une définition analoque pour un minimum relatif

Remarque

(x, y) est proche de (x_0, y_0) signifie qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $|x - x_0| \leq \varepsilon$ ET $|y - y_0| \leq \varepsilon$.

RECHERCHE D'EXTREMUM

PROPOSITION (CONDITION NÉCESSAIRE)

Si f atteint un extremum en (x_0, y_0), alors

$$p = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \quad et \quad q = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0 \, .$$

DEFINITION

Les points annulant p et q sont appelés points critiques.

Remarque

On sait qu'il faut chercher les points critiques mais pour l'instant, rien ne dit qu'on a effectivement un extremum.

COMMENT TROUVER UN EXTREMUM ?

PROPOSITION

Pour savoir si un point critique (x_0, y_0) est un extremum , on calcule la quantité $s^2 - rt$ au point (x_0, y_0) et

- *Si $s^2 - rt < 0$, f admet un extremum en (x_0, y_0) et*
  - *si $r < 0$, alors c'est un maximum*
  - *si $r > 0$, alors c'est un minimum.*
- *Si $s^2 - rt > 0$, f n'admet pas d'extremum en (x_0, y_0).*

Exemple

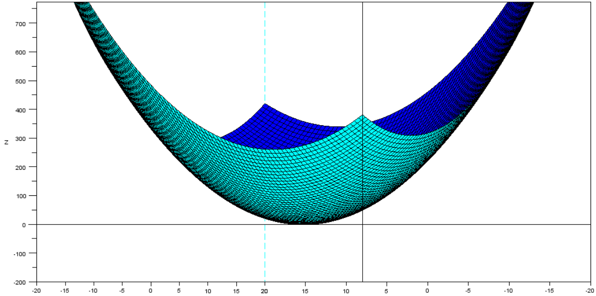
On recherche les extremums de la fonction f définie par $f(x, y) = x^2 - xy + y^2 + 3x - 2y + 1$.

- *On commence par trouver le ou les points critiques. On cherche (x, y) tel que*
- $p = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x - y + 3 = 0$ *et* $q = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -x + 2y - 2 = 0$
- *on trouve* $x = -4/3$ *et* $y = 1/3$

On a donc $(-4/3; 1/3)$ qui est l'unique point critique de $f : (x, y) \mapsto x^2 - xy + y^2 + 3x - 2y + 1$.

- On a déjà calculé $p = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x - y + 3$ et $q = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -x + 2y - 2$ qui sont nuls au point $(-4/3; 1/3)$
- $r = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 2$
- $s = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = -1$
- $t = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 2$
- donc $s^2 - rt = -3 < 0$ et $r = 2 > 0$,
- conclusion : on a un minimum en $(-4/3, 1/3)$.

COURBE REPRÉSENTATIVE



Courbe représentative de la fonction $f : (x, y) \mapsto x^2 - xy + y^2 + 3x - 2y + 1$

DEFINITION

Soit u et v deux fonctions. On appelle fonction composée de v par u la fonction g définie (lorsqu'elle existe) par $g(x) = u\big[v(x)\big]$. On note $g = u \circ v$ et on dit "u rond v".

Remarque

- *$u \circ v \neq v \circ u$: en effet si $u = \exp$ et v est la fonction carré, alors $(u \circ v)(x) = \exp(x^2)$ et $(v \circ u)(x) = \big(\exp(x)\big)^2 = \exp(2x)$.*
- *Rappel : $(u \circ v)' = v' \times \big(u' \circ v\big)$*

Remarque (Cas de plusieurs variables)

Si u et v sont des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et f est une fonction de deux variables $(x;y) \mapsto f(x;y)$ (de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$) alors on définit une nouvelle fonction notée F définie pour tout t réel

$$F(t) = f\big(u(t);v(t)\big)$$

et on a la formule de dérivation :

$$F'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}\big(u(t);v(t)\big) \times u'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}\big(u(t);v(t)\big) \times v'(t)\ .$$

Remarque (Cas de plusieurs variables (suite))

On se donne

- $u : (z; t) \mapsto u(z; t)$ *et* $v : (z; t) \mapsto v(z; t)$ *des fonctions de deux variables de* $\mathbb{R}^2$ *dans* $\mathbb{R}$
- f *est une fonction de deux variables* $(x; y) \mapsto f(x; y)$ *de* $\mathbb{R}^2$ *dans* $\mathbb{R}$ *aussi*
- *alors on peut définir une nouvelle fonction* F *: pour tout* $(z; t) \in \mathbb{R}^2$ *on pose*

$$F(z; t) = f\big(u(z; t); v(z; t)\big)$$

- *et on a les formules de dérivation :*

$$\frac{\partial F}{\partial z}(z; t) = \frac{\partial f}{\partial x}\big(u(z; t); v(z; t)\big) \times \frac{\partial u}{\partial z}(z; t) + \frac{\partial f}{\partial y}\big(u(z; t); v(z; t)\big) \times \frac{\partial v}{\partial z}(z; t)$$

$$\frac{\partial F}{\partial t}(z; t) = \frac{\partial f}{\partial x}\big(u(z; t); v(z; t)\big) \times \frac{\partial u}{\partial t}(z; t) + \frac{\partial f}{\partial y}\big(u(z; t); v(z; t)\big) \times \frac{\partial v}{\partial t}(z; t)$$

MOTIVATION

- On souhaite mesurer une grandeur physique.
- Chaque mesure x est entâchée d'une erreur Δx (qui est supposée petite).
- Si on lit x sur notre instrument de mesure, alors on peut juste dire que notre grandeur physique vaut $x \pm \Delta x$.

- Maintenant c'est $y = f(x)$ qui nous intéresse.
- On connaît f mais on ne peut pas mesurer directement y.
- On mesure x : on peut juste dire que l'on a $x \pm \Delta x$
- Comment va se transmettre sur y l'incertitude que l'on a sur x ?
- Heuristiquement on peut écrire

$$\text{erreur sur y} = \underbrace{f(x + \Delta x) - f(x)}_{\Delta f(x)} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \times \Delta x \simeq f'(x)\Delta x \; .$$

DIFFÉRENTIELLE D'UNE FONCTION

DEFINITION

- Pour une fonction d'une seule variable f (disons de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) que l'on suppose dérivable, on appelle différentielle de f et on note $df(x)$ l'objet suivant :

$$df(x) = f'(x)dx \ .$$

- Pour une fonction de deux variables $f : (x; y) \mapsto f(x; y)$ on aura de même

$$df(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x; y)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x; y)dy \ .$$

Exemple

Pour la fonction f définie par $f(x,y) = x^2 e^{\frac{y}{x}}$ on a

$$df(x,y) = e^{\frac{y}{x}}(2x - y)dx + xe^{\frac{y}{x}}dy \ .$$

DIFFÉRENTIELLE D'UNE FONCTION COMPOSÉE

- Pour trois fonctions $(x;y) \mapsto f(x,y)$, $t \mapsto u(t)$ et $t \mapsto v(t)$ toutes dérivables, si on pose $F(t) = f\big(u(t);v(t)\big)$ on a

$$dF(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(u(t),v(t)) \times du(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(u(t),v(t)) \times dv(t)$$

  avec $du(t) = u'(t)dt$ et $dv(t) = v'(t)dt$
- Si on a maintenant $(x;y) \mapsto f(x,y)$, $(z;t) \mapsto u(z,t)$ et $(x;y) \mapsto v(z,t)$ alors pour $F(z,t) = f\big(u(z,t);v(z,t)\big)$ on a

$$dF(z,t) = \frac{\partial f}{\partial x}(u(z,t);v(z,t)) \times du(z,t) + \frac{\partial f}{\partial y}(u(z,t),v(z,t)) \times dv(z,t)$$

  avec $du(z,t) = \dfrac{\partial u}{\partial z}(z;t)dz + \dfrac{\partial u}{\partial t}(z;t)dt.$

Règles de calcul sur les différentielles

- $d(x+y) = dx + dy$
- $d(xy) = xdy + ydx$
- $d\left(\dfrac{y}{x}\right) = \dfrac{xdy - ydx}{x^2}$
- $d\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) = \dfrac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}$
- $\dfrac{d(xy)}{xy} = \dfrac{dx}{x} + \dfrac{dy}{y}$

Généralités

- La mesure exacte est inaccessible ce qui justifie le calcul d'incertitude

Definition (Incertitude absolue)

L'incertitude absolue sur la mesure x d'une grandeur, quand on la remplace par une valeur approchée x_0 est $\Delta x = |x - x_0|$.

- En pratique on connaît x_0 (c'est une mesure) mais pas Δx.
- Par contre on connaît un majorant de Δx.
- On a $x = x_0 \pm \Delta x$

Definition (Incertitude relative)

L'incertitude relative sur la mesure x d'une grandeur, quand on la remplace par une valeur approchée x_0 est $\dfrac{\Delta x}{|x|} = \left|\dfrac{x - x_0}{x}\right|$.

- Connaissant les incertitudes absolues Δx, Δy, Δz sur les mesures de x, y et z, on cherche à calculer l'incertitude sur $f(x, y, z)$.
- On considère que les incertitudes sont petites, on peut se placer dans le cadre du calcul différentiel. On a :

$$df(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z)dy + \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z)dz\ .$$

- Le signe de l'incertitude étant inconnu, on se place dans le cas le plus défavorable :

$$\Delta f(x, y, z) = \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z)\right| \Delta x + \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z)\right| \Delta y + \left|\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z)\right| \Delta z\ .$$

Exemple

Si $f(x, y, z) = ax + by^2 - cz$ *alors*

- $df(x, y, z) = adx + 2bydy - cdz$
- $\Delta f(x, y, z) = |a|\Delta x + |2by|\Delta y + |c|\Delta z$

Si f est sous forme d'un produit ou d'un quotient, il vaux mieux le transformer en somme en prenant le logarithme. On parle alors de différentielle logarithmique et on utilise l'incertitude relative.

Exemple

- $f(x, y, z) = k\dfrac{xy}{z}$ *avec* k *une constante.*
- $\ln\big(f(x, y, z)\big) = \ln(k) + \ln(x) + \ln(y) - \ln(z)$
- *On calcule la différentielle du logarithme*

$$d\ln\big(f(x, y, z)\big) = 0 + d(\ln(x)) + d(\ln(y)) - d(\ln(z))$$
$$\frac{df(x, y, z)}{f(x, y, z)} = \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} - \frac{dz}{z}$$

- *On en déduit l'expression de l'incertitude relative*

$$\frac{\Delta f(x, y, z)}{|f(x, y, z)|} = \frac{\Delta x}{|x|} + \frac{\Delta y}{|y|} + \frac{\Delta z}{|z|} .$$

- *L'incertitude absolue est alors donnée par* $\Delta f(x, y, z) = |f(x, y, z)|\left(\dfrac{\Delta x}{|x|} + \dfrac{\Delta y}{|y|} + \dfrac{\Delta z}{|z|}\right)$

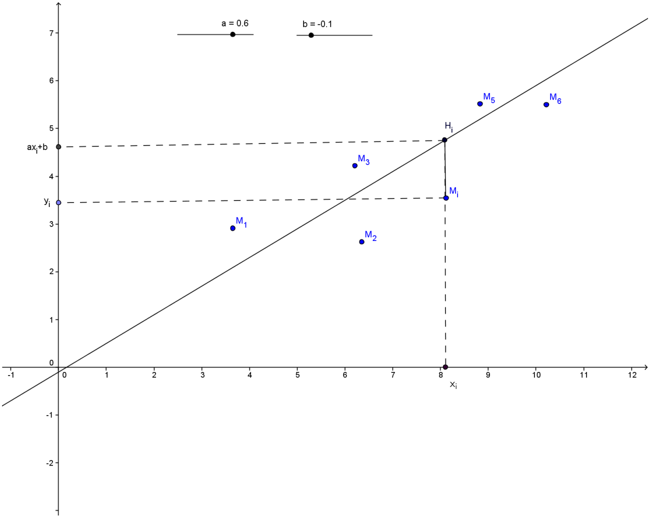
CADRE D'ÉTUDE

- On dispose de l'observation de n couples de résultats expérimentaux $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$, ..., $(x_n; y_n)$
- On représente ces résultats sous la forme d'un nuage de points : à chaque couple $(x_i; y_i)$ on fait correspondre un point M_i dans un repère orthonormé.
- Si le nuage de points a une forme allongée, on essaie de trouver une droite qui est la plus proche (en un sens à préciser) de tous les points
- On pense alors qu'il y a une relation linéaire du type $y = ax + b$ entre les x_i et les y_i.
- Pour déterminer cette droite, il faut trouver a et b.
- On introduit une distance entre les points et cette droite

$$D(a, b) = \sum_{i=1}^{n} \left[y_i - (ax_i + b)\right]^2.$$

- Interprétation graphique : ...

Illustration



MÉTHODE DES MOINDRS CARRÉS

DEFINITION

La méthode des moindres carrés consiste à déterminer les coefficients a et b de telle façon que la somme

$$D(a,b) = \sum_{i=1}^{n} \left[y_i - (ax_i + b)\right]^2$$

soit minimale.

- On considère D comme une fonction de deux variables a et b : cela revient à essayer toutes les droites possibles et à choisir la droite la plus proche du nuage.
- Pour trouver a et b, on cherche les points critiques de cette fonction de deux variables.
- On est donc amené à résoudre le système suivant : on cherche a et b tels que
- $$\begin{cases} \frac{\partial D}{\partial a}(a,b) & = 0 \\ \frac{\partial D}{\partial b}(a,b) & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 0 & = \sum_{i=1}^{n} -2\left[y_i - (ax_i + b)\right] x_i \\ 0 & = \sum_{i=1}^{n} -2\left[y_i - (ax_i + b)\right] \end{cases}$$

SOLUTION DU SYSTÈME

- C'est un système de deux équations à deux inconnues : sa résolution ne pose pas de problème
- On trouve

$$\hat{a} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1^n} x_i y_i - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n y_i\right)}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i\right)^2} \qquad \text{et} \qquad \hat{b} = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n y_i\right) - \hat{a}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i\right)$$

- Il n'y a donc qu'un seul point critique. Des calculs fastidieux (calcul de $s^2 - rt$) montrent que c'est un minimum.

DEFINITION (DROITE DE RÉGRESSION)

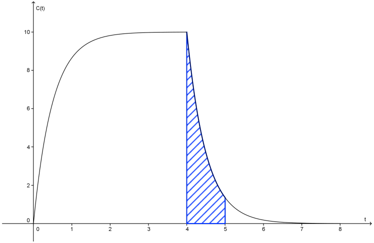
La droite d'équation $y = \hat{a}x + \hat{b}$, avec $\hat{a}$ et $\hat{b}$ donnés par les expressions ci-dessus, est appelée droite de régression de y en x.
On dit aussi que c'est la droite d'ajustement obtenue par la méthode des moindres carrés.

Remarque

Des exemples seront proposés dans l'ED1.

Exemple

La courbe suivante est la courbe représentative la fonction $C : t \mapsto C(t)$ qui donne à une date t la concentration plasmatique d'un médicament injecté.



Courbe représentative de la fonction $C : t \mapsto C(t)$

On sera intéressé par la quantité représentée par l'aire hachurée qui a un lien avec l'évolution de la quantité du médicament après la perfusion qui a eu lieu entre $t = 0$ heures et $t = 4$ heures.

DEFINITION (PRIMITIVES ET INTÉGRALE)

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$.

- Une fonction dérivable F définie sur $[a;b]$ telle que pour tout $x \in [a;b]$, $F'(x) = f(x)$ est appelée primitive de f.
- Le nombre $F(b) - F(a)$ est l'intégrale de la fontion f entre a et b et est noté $\int_a^b f(x)dx$.

Remarque

- *F n'est pas définie de manière unique. En effet si F est une primitive de f, alors $\widetilde{F} = F + C$ est aussi une primitive de f. En effet : on aura $\widetilde{F}'(x) = F'(x) + 0 = f(x)$.*
- *On parle donc d'une primitive !*
- *Si on impose une valeur particulière, on obtient une seule fonction primitive. ...*

PROPRIÉTÉS DES PRIMITIVES

PROPRIÉTÉ

Une primitive F de f satisfaisant $F(x_0) = F_0$ est unique. En effet :

- Soit G une autre primitive de f telle que $G(x_0) = F_0$
- On a $(F - G)' = f' - f' = 0$
- Donc $F - G$ est la fonction constante égale à C
- En particulier $F(x_0) - G(x_0) = F_0 - F_0 = C$ et donc $C = 0$
- Donc $F = G$

Remarque

Soit c fixé dans $[a;b]$. La primitive F de f telle que $F(c) = 0$ est unique et est noté $\int_c^x f(y)dy$.

Remarque

On note $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = \left[F(x)\right]_{x=a}^{x=b}$.

PROPRIÉTÉS DE L'INTÉGRALE

PROPRIÉTÉ

L'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ est définie de manière unique.

- En effet si F et G sont deux primitives de f,
- alors il existe une constante c telle que $F = G + c$.
- Ainsi
$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a) = F(b) + c - (F(a) + c) = F(b) - F(a) \,.$$

Exemple

$$\int_0^\pi \sin(x)dx = \big[-\cos(x)\big]_{x=0}^{x=\pi} = -\cos(\pi) - \big(-\cos(0)\big) = 2 \,.$$

PROPRIÉTÉS DE L'INTÉGRALE (SUITE)

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a;b]$, λ et μ deux réels et soit x_0 tel que $a \leq x_0 \leq b$.

PROPRIÉTÉ

- $\displaystyle\int_{x_0}^{x_0} f(x)dx = F(x_0) - F(x_0) = 0$
- $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
- *relation de Chasles :* $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_a^{x_0} f(x)dx + \int_{x_0}^b f(x)dx$
- *linéarité :* $\displaystyle\int_a^b [\lambda f(x) + \mu g(x)]\, dx = \lambda \int_a^b f(x)dx + \mu \int_a^b g(x)dx$
- *monotonie : si pour tout* $x \in [a;b]$, $f(x) \leq g(x)$ *alors* $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$
- $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$

THÉORÈME DE LA MOYENNE

PROPRIÉTÉ

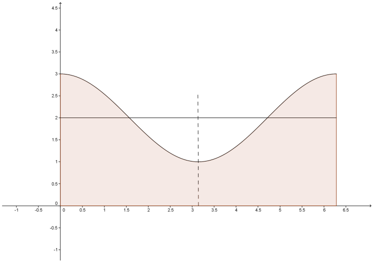
- *Soit f continue sur* $[a;b]$.
- *On sait qu'il existe m et M dans* $[a;b]$ *tels que*

$$m = \inf_{x \in [a;b]} f(x) \qquad et \qquad M = \sup_{x \in [a;b]} f(x) .$$

- *Le réel μ défini par* $\mu = \dfrac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$ *vérifie* $m \leq \mu \leq M$
- μ *représente la valeur moyenne de f sur l'intervalle* $[a;b]$.

EXEMPLE POUR $f : x \mapsto 2 + \cos(x)$ SUR $[0;2\pi]$

- On a $\mu = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx = \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{2\pi} 2dx + \int_0^{2\pi}\cos(x)dx\right) = 2 + \frac{1}{2\pi}\Big[\sin(x)\Big]_{x=0}^{x=2\pi} = 2$
-

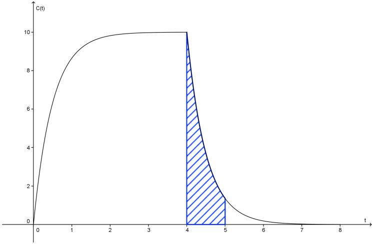


CALCULS D'AIRES

PROPRIÉTÉ

Le nombre $\int_a^b f(x)dx$ est l'aire de la surface délimitée par la courbe représentative de f et les droites verticales $x = a$ et $x = b$ et l'axe des abscisses $y = 0$.

Exemple (Courbe de concentration plasmatique.)



Courbe représentative de la fonction $C : t \mapsto C(t)$

Suite de l'exemple

La fonction C est définie par

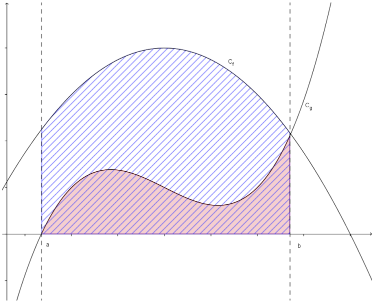
$$C(t) = \begin{cases} 10(1 - e^{-2t}) & \text{si } 0 \leq t \leq 4\,; \\ 10(e^8 - 1)e^{-2t} & \text{si } t \geq 4. \end{cases}$$

On remarque que la fonction C est bien continue. On calcule l'aire hachurée :

$$A = \int_4^5 C(t)dt = 10(e^8 - 1)\int_4^5 e^{-2t}dt = 10(e^8 - 1)\left[\frac{-1}{2}e^{-2t}\right]_{t=4}^{t=5} \simeq 4,32\ .$$

CALCUL DE L'AIRE D'UN DOMAINE DÉLIMITÉ PAR DEUX COURBES

Soit $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ les courbes représentatives des fonctions f et g. L'aire hachurée dans le graphique ci-dessous est donnée par $A = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$.



PRIMITIVES USUELLES

- Les primitives usuelles sont obtenues en "lisant de droite à gauche" les tableaux donnant les dérivées usuelles.
- Par exemple

fonction $x \mapsto f(x)$	primitive de f	Commentaires
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + c$	pour $n \in \mathbb{Z}$ et $n \neq -1$
$\frac{1}{x}$	$\ln(x) + c$	pour $x > 0$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + c$	pour $x > 0$
a^x	$\frac{a^x}{\ln(a)} + c$	

- La primitive de la fonction polynomiale $x \mapsto a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$ est la fonction polynomiale

$$x \mapsto c + a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + a_2 \frac{x^3}{3} + \dots + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} .$$

FORMULE D'INTÉGRATION PAR PARTIES

PROPRIÉTÉ

Soit u et v deux fonctions dérivables à dérivées continues. On a la formule suivante dite formule d'intégration par parties :

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = \Big[u(x)v(x)\Big]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b u'(x)v(x)dx \,.$$

Exemple

- *On souhaite calculer* $I = \int_1^e \ln(t)dt$.
- *On pose* $u(t) = \ln(t)$ *et* $v'(t) = 1$ *(ainsi on choisit* $v(t) = t$ *!)*
- $$\int_1^e \ln(t)dt = \Big[\ln(t) \times t\Big]_{t=1}^{t=e} - \int_1^e \frac{1}{t} \times t\,dt = e\ln(e) - \ln(1) - \int_1^e 1dt = e - 0 - (e-1) = 1 \,.$$

Remarque (Utilisation de la formule d'intégration par parties)

Cette formule est particulièrement bien adaptée pour le calcul d'intégrales de produit

- *d'un polynome par une exponentielle,*
- *d'un polynome par une fonction* ln
- *d'une fonction exponentielle par une fonction* ln
- *d'un produit de fonction* sin *ou* cos *par un exponentielle ou un polynome...*

PROPRIÉTÉ (QUELQUES FORMULES)

Soit u et v des fonctions dérivables dont la dérivée est continue. On a (à une constante additive près)

- *une primitive de* $\dfrac{u'}{u}$ *est la fonction* $\ln(u)$ *(pourvu que u soit positive)*
- *une primitive de* $u'\exp(u)$ *est la fonction* $\exp(u)$
- *une primitive de* $u'v$ *est la fonction* $uv - v'u$ *(formule provenant de la dérivation du produit uv)*
- *....*

Merci de votre attention

et

Bon courage pour la suite