PACES & APEMR 2014-2015, UE 4, ED 1

Des fautes de frappes dans la version précédente ont été corrigées en rouge (16/09/2014)

Exercice 1

Le radium se désintègre au cours du temps en obéissant à la loi $M(t) = M_0 e^{-0{,}000436\,t}$ où M_0 représente la masse de radium présente au temps $t = 0$ et t est exprimé en années.

1. Tracez le graphe de la fonction M (en prenant $M_0 = 10$) après une étude succincte.
2. À partir de $t = 0$, combien de temps faut-il attendre pour que la masse se réduise de moitié ?
3. À partir de $t = 10$, combien de temps faut-il attendre pour que la masse se réduise de moitié ? Discuter le résultat obtenu.

Exercice 2

Soit f la fonction $x \mapsto \dfrac{\ln x}{x^2} + x - 1$. On notera $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative.

1. Étudier les variations de la fonction f.
2. Parmi les propositions suivantes, lesquelles sont correctes ?
   A. La droite $x = 0$ est asymptote à $(\mathcal{C})$.
   B. La droite $y = x + 1$ est asymptote à $(\mathcal{C})$.
   C. La droite $y = x - 1$ est tangente à $(\mathcal{C})$ en $+\infty$.
   D. La droite $y = 2(x - 1)$ est tangente à $(\mathcal{C})$ en 1.
   E. La droite $y = x - 1$ est asymptote à $(\mathcal{C})$.
3. Tracer sa courbe représentative $(\mathcal{C})$.
4. On note g la fonction définie pour $x > 0$ par $g(x) = \frac{\ln x}{x^2}$. Parmi les propositions suivantes, quelles sont les propositions justes ?
   A. La fonction $G(x) = -\frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x}$ est une primitive de la fonction g.
   B. La fonction $G(x) = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}$ est la primitive de la fonction g.
   C. La fonction $G(x) = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}$ est une primitive de la fonction g.
   D. La fonction $G(x) = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}$ est la primitive de la fonction g qui vaut -1 en $x = 1$.
   E. La fonction $G(x) = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + 23$ est une primitive de la fonction g.
5. On note $\mathcal{A}$ l'aire (exprimée en Unité d'Aire notée UA) du domaine délimité par $(\mathcal{C})$ et les droites d'équation $x = 1$, $x = 2$ et $y = x - 1$. Parmi les propositions suivantes, quelles sont les propositions justes ?
   A. $\mathcal{A} = \frac{1}{2}(1 + \ln 2)$
   B. $\mathcal{A} = \frac{1}{2}(1 + \ln 2)$ UA
   C. $\mathcal{A} = \frac{1}{2}(1 - \ln 2)$ UA
   D. $\mathcal{A} = 0{,}15$ UA
   E. $\mathcal{A} = 0{,}85$ UA

Exercice 3

On a effectué une mesure (en Unité Internationale notée UI) des variables positives x et y. La variable z est liée aux précédentes par la relation $z = x^2 e^{\frac{y}{x}}$. On cherche à calculer z ainsi que Δz. On dispose pour cela du tableau suivant :

x	Δx	y	Δy
1	0,03	2,1	0,02

1. On note f la fonction de deux variables définies par $f(x, y) = x^2 e^{\frac{y}{x}}$. Quelles sont les propositions exactes ?
   A. $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = e^{y/x} \times (2x + y)$
   B. $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = e^{y/x} \times (2x - y)$
   C. $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = e^{y/x}$
   D. $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x\, e^{y/x}$
   E. $df(x, y) = \left[e^{y/x} \times (2x - y)\right] dx + x\, e^{y/x} dy$.
2. Cocher les propositions donnant l'incertitude absolue Δz.
   A. $\Delta z = \left[e^{y/x} \times (2x - y)\right] \Delta x + x\, e^{y/x} \Delta y$
   B. $\Delta z = \left[e^{y/x} \times (2x - y)\right] \Delta x + x\, e^{y/x} \Delta y$ UI
   C. $\Delta z = \left[e^{y/x} \times |2x - y|\right] \Delta x + x\, e^{y/x} \Delta y$ UI
   D. $\Delta z = 0{,}139$ UI
   E. $\Delta z = 0{,}189$ UI
3. Parmi les propositions suivnates, lesquelles sont correctes ?
   A. $d \ln(z) = \frac{dx}{x} |2 - y/x| + dy/x$
   B. $d \ln(z) = \frac{dx}{x} (2 - y/x) + dy/x$
   C. $\frac{dz}{z} = \frac{dx}{x} (2 - y/x) + dy/x$
   D. $\frac{\Delta z}{z} = \frac{dx}{x} (2 - y/x) + dy/x$
   E. $\frac{\Delta z}{z} = \frac{dx}{x} |2 - y/x| + dy/x$

Exercice 4

Une expérience a été réalisée pour déterminer la vitesse de sédimentation notée v de particules sphériques, dans un fluide visqueux. La vitesse v depend de la masse volumique ρ de la bille de rayon r et des caractéristiques du fluide (de masse volumique ρ_0 et de viscosité η) selon l'expression :

$$v = \frac{2r^2}{9\eta} (\rho - \rho_0)\, g$$

où g est l'accélération de la pesanteur.

Sachant qu'il existe une erreur de mesure sur les différents paramètres (notée respectivement Δr, $\Delta \eta$, $\Delta \rho$, $\Delta \rho_0$ et Δg), on recherche l'expression de l'incertitude absolue Δv de la vitesse de sédimentation, dans le cas où $\Delta \rho_0$ est négligeable.

Pour les applications numériques, on donne :

$$r = 0,002\ m \qquad \Delta r = 0,00002\ m$$
$$\eta = 10^{-2}\ Pa.s \qquad \Delta\eta = 10^{-6}\ Pa.s$$
$$\rho = 1100\ kg/m^3 \qquad \Delta\rho = 1\ kg/m^3$$
$$\rho_0 = 1000\ kg/m^3 \qquad \Delta\rho_0 \text{ négligeable}$$
$$g = 9,81\ m/s^2 \qquad \Delta g = 0,01\ m/s^2\ .$$

1. Cocher la proposition donnant la valeur numérique de la vitesse de sédimentation v.
   A. 0,0872
   B. 8,72
   C. 0,0872 m/s
   D. 8,72 m/h
   E. 0,00872 m/s
2. Calculer l'incertitude relative de la vitesse de sédimentation. Quelles sont les propositions justes ?
   A. 0,0309
   B. 0,0309 m/s
   C. 3,11%
   D. 0,03%
   E. 0,0311
3. Cocher la proposition donnant l'incertitude absolue notée Δv de la vitesse de sédimentation.
   A. 0,0027
   B. 0,0027 m/s
   C. 0,003 m/s
   D. 0,003
   E. 0,002 m/s
4. Comment présenteriez-vous le résultat de v ? Quelle est la proposition juste ?
   A. 8,72 $\pm$ 0,003 m/s
   B. 0,0872 $\pm$ 0,003
   C. 0,0872 $\pm$ 0,0027 m/s
   D. 0,0872 $\pm$ 0,003 m/s
   E. 0,0872 $\pm$ 0,001 m/s

Exercice 5

Le tableau suivant donne la teneur de l'air en dioxyde de carbone (CO_2), observée depuis le début de l'ère industrielle. Dans le tableau ci-dessous, x_i désigne le rang de l'année et y_i la teneur en CO_2 exprimée en partie par million (ppm).

Année	1850	1900	1950	1990	2010
Rang de l'année x_i	0	50	100	140	160
Teneur en CO_2 y_i	270,1	283,1	304,6	331,45	349,5

On cherche à déterminer une fonction qui soit "proche" du nuage de points $(x_i, y_i)_{1\leq i\leq 5}$.

1. Tracer le nuage de points $(x_i, y_i)_{1 \leq i \leq 5}$. Une relation linéaire du type $y = \alpha + \beta x$, entre la teneur en dioxyde de carbone et le rang de l'année, vous semble-t-elle justifiée ?
2. On pose $z_i = \ln(y_i - 250)$. Une relation linéaire du type $z = \alpha + \beta x$ vous semble-t-elle justifiée ?
3. On veut déterminer, par la méthode des moindres carrés, deux coefficients a et b tels que $z = a\,x + b$. Quel système doit-on résoudre ?

   A.
$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{5} [y_i - (ax_i + b)]^2 \, x_i & = 0 \\ \sum_{i=1}^{5} [y_i - (ax_i + b)]^2 & = 0 \end{cases}$$
   B.
$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{5} [y_i - (ax_i + b)] \, x_i & = 0 \\ \sum_{i=1}^{5} [y_i - (ax_i + b)] & = 0 \end{cases}$$
   C.
$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{5} [z_i - (ax_i + b)] \, x_i & = 0 \\ \sum_{i=1}^{5} [z_i - (ax_i + b)] & = 0 \end{cases}$$
   D.
$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{5} [z_i - (ax_i + b)]^2 \, x_i & = 0 \\ \sum_{i=1}^{5} [z_i - (ax_i + b)] & = 0 \end{cases}$$
   E.
$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{5} [x_i - (az_i + b)] \, z_i & = 0 \\ \sum_{i=1}^{5} [x_i - (az_i + b)] & = 0 \end{cases}$$
4. Après résolution du système, on trouve $a = 0{,}01$ et $b = 3$. Parmi les propositions suivantes, laquelle donne l'expression de la teneur en dioxide de carbone en fonction du rang x de l'année ?
   A. $y = 250 + \exp(3 + 0{,}01x)$
   B. $y = 250 - \exp(3 + 0{,}01x)$
   C. $y = 250 \times \exp(3 + 0{,}01x)$
   D. $y = 250 + 3\exp(0{,}01x)$
   E. $y = 250 + 20{,}09\exp(0{,}01x)$
5. Selon ce modèle, quelle teneur en CO_2 peut-on prévoir en 2030 ?