PACES - APEMK
UE 4
Evaluation des méthodes d'analyses appliquées aux sciences de la vie et de la santé

Comparaison de Moyennes et de Variances

Prof Franck Bonnetain
Unité de méthodologie & de qualité de vie en cancérologie (EA3181)
CHU Besançon

Plan du cours

- **Rappel-Généralités**

- **I. Comparaison de variances**

- **II. Comparaison d'une moyenne observée à une moyenne théorique**
  - Test Z de l'écart réduit
  - Test t de Student

- **III. Comparaison de 2 moyennes observées sur 2 échantillons indépendants**
  - Test Z de l'écart réduit
  - Test t de Student

- **IV. Comparaison de 2 moyennes observées sur 2 échantillons appariés**
  - Test Z de l'écart réduit
  - Test t de Student

Rappel

- Principe d'un test statistique
- Cas des variables continues / quantitatives
  - Ages
  - Notes
  - Paramètres biologiques
  - Etc …

⇨ **Moyenne, médiane, écart type variance**

Rappel-Généralités

- Situation du problème :

  – On dispose d'une variable qualitative binaire (Sexe : Homme vs Femme) qui permet de définir deux groupes de population.

  – On mesure une variable quantitative (note à des examens) qui permet de calculer dans chaque groupe les différents paramètres de la distribution : moyenne, estimateur de l'écart type...

I -Comparaison de variances

I -Comparaison de variances

- **Variance** = moyenne des carrés des écarts à la moyenne
- Somme des carrés d'écart à la moyenne $\boxed{\sum e_i^2 = \sum (x_i - \bar{x})^2}$

$$\hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

- Rapporté à l'effectif
  - Échantillon $\boxed{s^2 = \frac{\sum e_i^2}{n-1}}$
  - Population $\boxed{\sigma^2 = \frac{\sum e_i^2}{N}}$
- Ecart type = racine carrée de la variance

I- Comparaison de variances

- La comparaison de la variance est un outil essentiel en statistique.
- Supposons que nous disposons de p échantillons gaussiens indépendants de tailles respectives n1; ….; np.
- On peut pour chaque échantillon, calculer un estimateur sans biais de la variance de la population.
- Par exemple, pour le kieme échantillon, un estimateur sans biais de la variance de population σ_k^2 est donné par:

$$\hat{\sigma}_k^2 = \frac{1}{n_k - 1} \sum_{i=1}^{n_k} (X_i^k - \bar{X}^k)^2$$

- où est X_i^k la iieme donnée de l'échantillon k, et, $\bar{X}^k$ est la moyenne de l'échantillon k.

I- Comparaison de variances

- Intérêt de comparer deux variances :
  - Comparer 2 moyennes lorsque les échantillons sont petits et qu'on utilise le test t de Student pour vérifier l'égalité des variances
  - Comme une fin en soi lorsque la question est centrée sur variabilité : i.e comparer la précisions de 2 méthodes de laboratoires quantifiant un paramètre sanguin

I- Comparaison de variances

- Comparaison de 2 variances peut être basée
  - Sur leur différence si les échantillons sont grands
  - Un test plus général basé sur le **rapport de leurs 2 variances** dans étude préalable des fluctuations d'échantillonnage du rapport de 2 variances, celles-ci différant significativement si le rapport s'écarte trop de 1.

I- Comparaison de variances

- Rapport de 2 variances
  - Tirage au sort de , 2 échantillons $n_A$et n_B issues de 2 populations qui ont la même variance σ^2
  - Variances estimées S_A^2 et S_B^2doivent être proches de σ^2
  - Rapport F = $\frac{S_A^2}{S_B^2}$ dont la valeur théorique est proche de 1 sous l'hypothèse H0 d'égalité des variances
  - Fluctuations d'échantillonnage : intervalle de confiance du rapport F : F_{sup}et F_{inf}

I -Comparaison de variances

- Solution grâce **aux tables F** qui permettent de déterminer les limites de l'Intervalle de Confiance F_{sup} et F_{inf} pour les différents risques d'erreur alpha (α) de première espèce en fonction des degrés de liberté (d.d.l) : n_A - 1 et n_B-1

- Test de comparaison F doit rester compris dans les limites F_{sup} et F_{inf}, pour le risque α déterminé-choisi en général 5%

- Condition d'utilisation de ces tables :
  - distribution normale quel que soit la taille de l'échantillon.

I -Comparaison de variances

- Nous disposons de 2 échantillons ($n_A$et n_B) extraits de 2 populations dont la distribution de la variable étudiée est supposée suivre une loi normale
  - 2 variances estimées S_A^2 et S_B^2
- Question : peut on admettre que les variances des 2 populations σ_A^2 et σ_B^2 sont égales ?
  - ***Hypothèse nulle H0*** $\sigma_A^2 = \sigma_B^2$
  - ***Hypothèse alternative H1*** $\sigma_A^2 \neq \sigma_B^2$
- Si l'hypothèse nulle H0 est vérifiée, le rapport F = $\frac{S_A^2}{S_B^2}$ doit rester dans les limites F_{sup}et F_{inf} pour un risque global de 5 %
- S'il sort de cet intervalle = les variances diffèrent on rejette H0 et on accepte H1

I -Comparaison de variances

- Etapes du calcul

  – Estimation de chacune des variances dans l'échantillon A et B
  – Recherche des limites F_{sup}et F_{inf} dans les tables du F à 2,5% (ie risque global de 5%)
  – F_{sup} pour un échantillon A de 25 pts et B de 30 pts est F_{29}^{24} = 2.15
  – F_{inf} = $\frac{1}{F_{24}^{29}}$ = $\frac{1}{2.22}$ = 0.45
  – L'IC est donc 0.45 – 2.15

  – Les variances S_A^2 et S_B^2 sont respectivement 5.16 et 1.96

- Donc F = $\frac{S_A^2}{S_B^2}$ = $\frac{5.16}{1.96}$ = 2.63

F_{sup} pour un échantillon A de 25 pts et B de 30 pts est F^{24}_{29} = 2.15

Table A4. Upper percentage points of the F distribution with ν_1, ν_2 df

(b) 2.5% points

ν_2 \ ν_1=df for the numerator	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	647.790	799.502	864.165	899.585	921.850	937.113	948.219	956.658	963.286	968.629	976.710	984.869	993.105	997.251	1001.416	1005.600	1009.802	1014.022	1018.260
2	38.506	39.000	39.166	39.248	39.298	39.331	39.355	39.373	39.387	39.398	39.415	39.431	39.448	39.456	39.465	39.473	39.481	39.490	39.498
3	17.4435	16.0441	15.4392	15.1010	14.8848	14.7347	14.6244	14.5399	14.4731	14.4190	14.3366	14.2527	14.1674	14.1242	14.0805	14.0365	13.9921	13.9473	13.9021
4	12.2179	10.6491	9.9792	9.6045	9.3645	9.1973	9.0741	8.9796	8.9047	8.8439	8.7512	8.6565	8.5599	8.5109	8.4613	8.4111	8.3604	8.3092	8.2573
5	10.0070	8.4336	7.7636	7.3879	7.1464	6.9777	6.8531	6.7572	6.6811	6.6192	6.5246	6.4277	6.3286	6.2780	6.2269	6.1751	6.1225	6.0693	6.0153
6	8.8131	7.2599	6.5988	6.2272	5.9876	5.8198	5.6955	5.5996	5.5234	5.4613	5.3662	5.2687	5.1684	5.1172	5.0652	5.0125	4.9589	4.9044	4.8491
7	8.0727	6.5415	5.8898	5.5226	5.2852	5.1186	4.9949	4.8993	4.8232	4.7611	4.6658	4.5678	4.4667	4.4150	4.3624	4.3089	4.2544	4.1989	4.1423
8	7.5709	6.0595	5.4160	5.0526	4.8173	4.6517	4.5286	4.4333	4.3572	4.2951	4.1997	4.1012	3.9995	3.9472	3.8940	3.8398	3.7844	3.7279	3.6702
9	7.2093	5.7147	5.0781	4.7181	4.4844	4.3197	4.1970	4.1020	4.0260	3.9639	3.8682	3.7694	3.6669	3.6142	3.5604	3.5055	3.4493	3.3918	3.3329
10	6.9367	5.4564	4.8256	4.4683	4.2361	4.0721	3.9498	3.8549	3.7790	3.7168	3.6209	3.5217	3.4185	3.3654	3.3110	3.2554	3.1984	3.1399	3.0798
11	6.7241	5.2559	4.6300	4.2751	4.0440	3.8807	3.7586	3.6638	3.5879	3.5257	3.4296	3.3299	3.2261	3.1725	3.1176	3.0613	3.0035	2.9441	2.8828
12	6.5538	5.0959	4.4742	4.1212	3.8911	3.7283	3.6065	3.5118	3.4358	3.3736	3.2773	3.1772	3.0728	3.0187	2.9633	2.9063	2.8478	2.7874	2.7249
13	6.4143	4.9653	4.3472	3.9959	3.7667	3.6043	3.4827	3.3880	3.3120	3.2497	3.1532	3.0527	2.9477	2.8932	2.8372	2.7797	2.7204	2.6590	2.5955
14	6.2979	4.8567	4.2417	3.8919	3.6634	3.5014	3.3799	3.2853	3.2093	3.1469	3.0502	2.9493	2.8437	2.7888	2.7324	2.6742	2.6142	2.5519	2.4872
15	6.1995	4.7650	4.1528	3.8043	3.5764	3.4147	3.2934	3.1987	3.1227	3.0602	2.9633	2.8621	2.7559	2.7006	2.6437	2.5850	2.5242	2.4611	2.3954
16	6.1151	4.6867	4.0768	3.7294	3.5021	3.3406	3.2194	3.1248	3.0488	2.9862	2.8890	2.7875	2.6808	2.6252	2.5678	2.5085	2.4471	2.3831	2.3163
17	6.0420	4.6189	4.0112	3.6648	3.4379	3.2767	3.1556	3.0610	2.9849	2.9222	2.8249	2.7230	2.6158	2.5598	2.5020	2.4422	2.3801	2.3153	2.2474
18	5.9781	4.5597	3.9539	3.6083	3.3820	3.2209	3.0999	3.0053	2.9291	2.8664	2.7689	2.6667	2.5590	2.5027	2.4445	2.3842	2.3214	2.2558	2.1869
19	5.9216	4.5075	3.9034	3.5587	3.3327	3.1718	3.0509	2.9563	2.8801	2.8172	2.7196	2.6171	2.5089	2.4523	2.3937	2.3329	2.2696	2.2032	2.1333
20	5.8715	4.4613	3.8587	3.5147	3.2891	3.1283	3.0074	2.9128	2.8365	2.7737	2.6758	2.5731	2.4645	2.4076	2.3486	2.2873	2.2234	2.1562	2.0853
21	5.8266	4.4199	3.8188	3.4754	3.2501	3.0895	2.9686	2.8740	2.7977	2.7348	2.6368	2.5338	2.4247	2.3675	2.3082	2.2465	2.1819	2.1141	2.0422
22	5.7863	4.3828	3.7829	3.4401	3.2151	3.0546	2.9338	2.8392	2.7628	2.6998	2.6017	2.4984	2.3890	2.3315	2.2718	2.2097	2.1446	2.0760	2.0032
23	5.7498	4.3492	3.7505	3.4083	3.1835	3.0232	2.9023	2.8077	2.7313	2.6682	2.5699	2.4665	2.3567	2.2989	2.2389	2.1763	2.1107	2.0415	1.9677
24	5.7166	4.3187	3.7211	3.3794	3.1548	2.9946	2.8738	2.7791	2.7027	2.6396	2.5411	2.4374	2.3273	2.2693	2.2090	2.1460	2.0799	2.0099	1.9353
25	5.6864	4.2909	3.6943	3.3530	3.1287	2.9685	2.8478	2.7531	2.6766	2.6135	2.5149	2.4110	2.3005	2.2422	2.1816	2.1183	2.0516	1.9811	1.9055
26	5.6586	4.2655	3.6697	3.3289	3.1048	2.9447	2.8240	2.7293	2.6528	2.5896	2.4908	2.3867	2.2759	2.2174	2.1565	2.0928	2.0257	1.9545	1.8781
27	5.6331	4.2421	3.6472	3.3067	3.0828	2.9228	2.8021	2.7074	2.6309	2.5676	2.4688	2.3644	2.2533	2.1946	2.1334	2.0693	2.0018	1.9299	1.8527
28	5.6096	4.2205	3.6264	3.2863	3.0626	2.9027	2.7820	2.6872	2.6106	2.5473	2.4484	2.3438	2.2324	2.1735	2.1121	2.0477	1.9797	1.9072	1.8291
29	5.5878	4.2006	3.6072	3.2674	3.0438	2.8840	2.7633	2.6686	2.5920	2.5286	2.4295	2.3248	2.2131	$\boxed{2.1540}$	2.0923	2.0276	1.9591	1.8861	1.8072
30	5.5675	4.1821	3.5894	3.2499	3.0265	2.8667	2.7460	2.6513	2.5746	2.5112	2.4120	2.3072	2.1952	2.1359	2.0739	2.0089	1.9400	1.8664	1.7867
40	5.4239	4.0510	3.4633	3.1261	2.9037	2.7444	2.6238	2.5289	2.4519	2.3882	2.2882	2.1819	2.0677	2.0069	1.9429	1.8752	1.8028	1.7242	1.6371
60	5.2856	3.9253	3.3425	3.0077	2.7863	2.6274	2.5068	2.4117	2.3344	2.2702	2.1692	2.0613	1.9445	1.8817	1.8152	1.7440	1.6668	1.5810	1.4822
120	5.1523	3.8046	3.2269	2.8943	2.6740	2.5154	2.3948	2.2994	2.2217	2.1570	2.0548	1.9450	1.8249	1.7597	1.6899	1.6141	1.5299	1.4327	1.3105
∞	5.0239	3.6889	3.1161	2.7858	2.5665	2.4082	2.2876	2.1918	2.1137	2.0483	1.9447	1.8326	1.7085	1.6402	1.5660	1.4836	1.3883	1.2685	1.0039

$$F_{inf} = \frac{1}{F^{29}_{24}} = \frac{1}{2.22} = 0.45$$

Table A4. Upper percentage points of the F distribution with ν_1, ν_2 df

(b) 2.5% points

ν_2 \ ν_1=df for the numerator	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	647.790	799.502	864.165	899.585	921.850	937.113	948.219	956.658	963.286	968.629	976.710	984.869	993.105	997.251	1001.416	1005.600	1009.802	1014.022	1018.260
2	38.506	39.000	39.166	39.248	39.298	39.331	39.355	39.373	39.387	39.398	39.415	39.431	39.448	39.456	39.465	39.473	39.481	39.490	39.498
3	17.4435	16.0441	15.4392	15.1010	14.8848	14.7347	14.6244	14.5399	14.4731	14.4190	14.3366	14.2527	14.1674	14.1242	14.0805	14.0365	13.9921	13.9473	13.9021
4	12.2179	10.6491	9.9792	9.6045	9.3645	9.1973	9.0741	8.9796	8.9047	8.8439	8.7512	8.6565	8.5599	8.5109	8.4613	8.4111	8.3604	8.3092	8.2573
5	10.0070	8.4336	7.7636	7.3879	7.1464	6.9777	6.8531	6.7572	6.6811	6.6192	6.5246	6.4277	6.3286	6.2780	6.2269	6.1751	6.1225	6.0693	6.0153
6	8.8131	7.2599	6.5988	6.2272	5.9876	5.8198	5.6955	5.5996	5.5234	5.4613	5.3662	5.2687	5.1684	5.1172	5.0652	5.0125	4.9589	4.9044	4.8491
7	8.0727	6.5415	5.8898	5.5226	5.2852	5.1186	4.9949	4.8993	4.8232	4.7611	4.6658	4.5678	4.4667	4.4150	4.3624	4.3089	4.2544	4.1989	4.1423
8	7.5709	6.0595	5.4160	5.0526	4.8173	4.6517	4.5286	4.4333	4.3572	4.2951	4.1997	4.1012	3.9995	3.9472	3.8940	3.8398	3.7844	3.7279	3.6702
9	7.2093	5.7147	5.0781	4.7181	4.4844	4.3197	4.1970	4.1020	4.0260	3.9639	3.8682	3.7694	3.6669	3.6142	3.5604	3.5055	3.4493	3.3918	3.3329
10	6.9367	5.4564	4.8256	4.4683	4.2361	4.0721	3.9498	3.8549	3.7790	3.7168	3.6209	3.5217	3.4185	3.3654	3.3110	3.2554	3.1984	3.1399	3.0798
11	6.7241	5.2559	4.6300	4.2751	4.0440	3.8807	3.7586	3.6638	3.5879	3.5257	3.4296	3.3299	3.2261	3.1725	3.1176	3.0613	3.0035	2.9441	2.8828
12	6.5538	5.0959	4.4742	4.1212	3.8911	3.7283	3.6065	3.5118	3.4358	3.3736	3.2773	3.1772	3.0728	3.0187	2.9633	2.9063	2.8478	2.7874	2.7249
13	6.4143	4.9653	4.3472	3.9959	3.7667	3.6043	3.4827	3.3880	3.3120	3.2497	3.1532	3.0527	2.9477	2.8932	2.8372	2.7797	2.7204	2.6590	2.5955
14	6.2979	4.8567	4.2417	3.8919	3.6634	3.5014	3.3799	3.2853	3.2093	3.1469	3.0502	2.9493	2.8437	2.7888	2.7324	2.6742	2.6142	2.5519	2.4872
15	6.1995	4.7650	4.1528	3.8043	3.5764	3.4147	3.2934	3.1987	3.1227	3.0602	2.9633	2.8621	2.7559	2.7006	2.6437	2.5850	2.5242	2.4611	2.3954
16	6.1151	4.6867	4.0768	3.7294	3.5021	3.3406	3.2194	3.1248	3.0488	2.9862	2.8890	2.7875	2.6808	2.6252	2.5678	2.5085	2.4471	2.3831	2.3163
17	6.0420	4.6189	4.0112	3.6648	3.4379	3.2767	3.1556	3.0610	2.9849	2.9222	2.8249	2.7230	2.6158	2.5598	2.5020	2.4422	2.3801	2.3153	2.2474
18	5.9781	4.5597	3.9539	3.6083	3.3820	3.2209	3.0999	3.0053	2.9291	2.8664	2.7689	2.6667	2.5590	2.5027	2.4445	2.3842	2.3214	2.2558	2.1869
19	5.9216	4.5075	3.9034	3.5587	3.3327	3.1718	3.0509	2.9563	2.8801	2.8172	2.7196	2.6171	2.5089	2.4523	2.3937	2.3329	2.2696	2.2032	2.1333
20	5.8715	4.4613	3.8587	3.5147	3.2891	3.1283	3.0074	2.9128	2.8365	2.7737	2.6758	2.5731	2.4645	2.4076	2.3486	2.2873	2.2234	2.1562	2.0853
21	5.8266	4.4199	3.8188	3.4754	3.2501	3.0895	2.9686	2.8740	2.7977	2.7348	2.6368	2.5338	2.4247	2.3675	2.3082	2.2465	2.1819	2.1141	2.0422
22	5.7863	4.3828	3.7829	3.4401	3.2151	3.0546	2.9338	2.8392	2.7628	2.6998	2.6017	2.4984	2.3890	2.3315	2.2718	2.2097	2.1446	2.0760	2.0032
23	5.7498	4.3492	3.7505	3.4083	3.1835	3.0232	2.9023	2.8077	2.7313	2.6682	2.5699	2.4665	2.3567	2.2989	2.2389	2.1763	2.1107	2.0415	1.9677
24	5.7166	4.3187	3.7211	3.3794	3.1548	2.9946	2.8738	2.7791	2.7027	2.6396	2.5411	2.4374	2.3273	$\boxed{2.2693}$	$\boxed{2.2090}$	2.1460	2.0799	2.0099	1.9353
25	5.6864	4.2909	3.6943	3.3530	3.1287	2.9685	2.8478	2.7531	2.6766	2.6135	2.5149	2.4110	2.3005	2.2422	2.1816	2.1183	2.0516	1.9811	1.9055
26	5.6586	4.2655	3.6697	3.3289	3.1048	2.9447	2.8240	2.7293	2.6528	2.5896	2.4908	2.3867	2.2759	2.2174	2.1565	2.0928	2.0257	1.9545	1.8781
27	5.6331	4.2421	3.6472	3.3067	3.0828	2.9228	2.8021	2.7074	2.6309	2.5676	2.4688	2.3644	2.2533	2.1946	2.1334	2.0693	2.0018	1.9299	1.8527
28	5.6096	4.2205	3.6264	3.2863	3.0626	2.9027	2.7820	2.6872	2.6106	2.5473	2.4484	2.3438	2.2324	2.1735	2.1121	2.0477	1.9797	1.9072	1.8291
29	5.5878	4.2006	3.6072	3.2674	3.0438	2.8840	2.7633	2.6686	2.5920	2.5286	2.4295	2.3248	2.2131	2.1540	2.0923	2.0276	1.9591	1.8861	1.8072
30	5.5675	4.1821	3.5894	3.2499	3.0265	2.8667	2.7460	2.6513	2.5746	2.5112	2.4120	2.3072	2.1952	2.1359	2.0739	2.0089	1.9400	1.8664	1.7867
40	5.4239	4.0510	3.4633	3.1261	2.9037	2.7444	2.6238	2.5289	2.4519	2.3882	2.2882	2.1819	2.0677	2.0069	1.9429	1.8752	1.8028	1.7242	1.6371
60	5.2856	3.9253	3.3425	3.0077	2.7863	2.6274	2.5068	2.4117	2.3344	2.2702	2.1692	2.0613	1.9445	1.8817	1.8152	1.7440	1.6668	1.5810	1.4822
120	5.1523	3.8046	3.2269	2.8943	2.6740	2.5154	2.3948	2.2994	2.2217	2.1570	2.0548	1.9450	1.8249	1.7597	1.6899	1.6141	1.5299	1.4327	1.3105
∞	5.0239	3.6889	3.1161	2.7858	2.5665	2.4082	2.2876	2.1918	2.1137	2.0483	1.9447	1.8326	1.7085	1.6402	1.5660	1.4836	1.3883	1.2685	1.0039

I -Comparaison de variances

- Conclusion 2.63 est supérieur à F_{sup}donc au seuil de 5% les 2 variances diffèrent significativement on rejette **H0**

- Plus de variabilité dans l'échantillon A

- Résultats identiques si on avait travaillé sur le rapport F = $\frac{S_B^2}{S_A^2}$

II - Comparaison d’une moyenne observée à une moyenne théorique

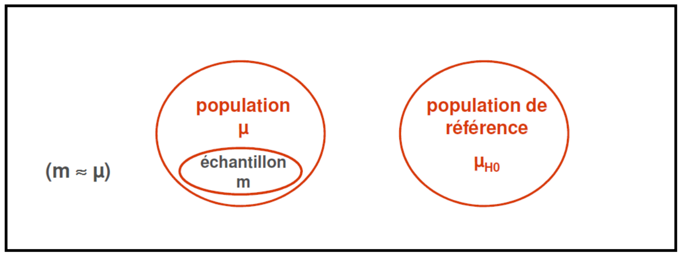
II - Comparaison d'une moyenne observée à une moyenne théorique

- Formulation de la problématique
  - La moyenne des notes d'un échantillon d'étudiants de PACES en 2012 en FC est elle différente de la moyenne de l'ensemble des étudiants de PACES en France?

  - H0 : $\mu = \mu_0$
  - H1 : $\mu \neq \mu_0$

- Test Z de l'écart réduit ($n \geq 30$)
- Test t de Student (hypothèse de normalité)

  - La moyenne de l'échantillon est m = estimation de μ



II - Comparaison d’une moyenne observée à une moyenne théorique

- **Grands échantillons n ≥ 30**
  - La comparaison d’une moyenne m, observée sur n personnes/ cas (échantillon), à une valeur moyenne théorique μ_0 est basée sur l’estimation de l’écart réduit
  - Z = $\frac{\mu-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{m-\mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$
  - S : écart type de l’échantillon
    - Si |Z| < 1.96 la différence entre les moyennes m et μ_0 n’est pas significative à 5 % ie non rejet de H0
    - Si |Z| $\geq$ 1.96 la différence entre les moyennes m et μ_0 est significative à 5 % ie rejet de H0
    - Le Risque Z est lu dans la table de l’écart réduit (ie ici valeur 1.96 pour 5%)

II - Comparaison d'une moyenne observée à une moyenne théorique

- Test Z de l'écart réduit

  - Sous H0 :
    - $\mu = \mu_0$ donc $\mu - \mu_0 = 0$
    - m estimation de μ sur l'échantillon

  - Si n ≥ 30 alors m suit une loi normale *N* (μ, $\sigma/\sqrt{n}$)
    - => m - μ_0 suit une loi normale centrée réduite *N* (0, $\sigma/\sqrt{n}$)

  - S^2 est une estimation de σ^2

II - Comparaison d’une moyenne observée à une moyenne théorique

- Soit un échantillon de 30 étudiants âgés de 18 ans et dont la moyenne des notes est de 43.5 sur 100.
  - *Sur le critère de la moyenne l’échantillon peut il provenir d’un population P dont la moyenne est 44 et de* $\sigma^2 = 2.54^2$ *?*

- Choix du test et vérification des conditions d’utilisation
  - On veut comparer la moyenne d’un échantillon à la moyenne d’ une population P de référence
  - La taille de l’échantillon est ≥ 30 et sa moyenne suit une loi normale

II - Comparaison d'une moyenne observée à une moyenne théorique

- La variable centrée réduite Z = m $-\mu_0$ / $s/\sqrt{n}$ suit une loi normale centrée réduite N(0,1)

- On définit H0 et H1
  - H0 : $\mu = \mu_0$
  - H1 : $\mu \neq \mu_0$

- On fixe le risque α à 5%
- On cherche à savoir si $\mu \neq \mu_0$ que μ soit inférieure ou supérieure (**situation bilatérale**)
- ***moyenne μ*** de la population est estimée par la ***moyenne m*** de l'échantillon donc au final on test $m \neq \mu_0$

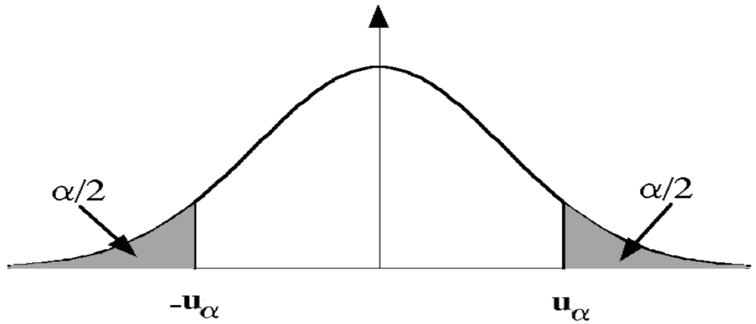
II - Comparaison d'une moyenne observée à une moyenne théorique

- On rejettera H0 si $|Z| \geq 1.96$ et on acceptera H1
- Si $|Z| < 1.96$ on ne rejettera pas H0
- Calcul de la statistique
  - $Z = \frac{43.5 - 44}{2.54/\sqrt{30}} = -1.078$

- $|Z| = 1.078 < 1.96$ donc on ne rejette pas H0 ie la moyenne observée ne diffère pas significativement de la moyenne théorique
  - p = compris en 0.28 et 0.29 (table de l'écart réduit)
  - Donc l'échantillon peut provenir de cette population

Loi normale centrée réduite

Table de l'écart réduit



$$Z = \frac{43.5 - 44}{2.54/\sqrt{30}} = -1.078$$

La table donne la probabilité α pour que l'écart réduit dépasse, en valeur absolue, une leur d ée u, c'est-à-dire la probabilité de ne pas trouver z dans l'intervalle [-u ; u] centré sur 0. Cha ne de aires hachurées correspondent à une probabilité égales $\alpha/2$. La probabilité d'observer z dans terval u ; u[est évidemment 1- α.

Test bilatéral : lire α Test unilatéral à droite ou à gauche : diviser α par 2

α	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,00	∞	2,576	2,326	2,170		1,960	1,881	1,812	1,751	1,695
0,10	1,645	1,598	1,555	1,514	1,476	1,440	1,405	1,372	1,341	1,311
0,20	1,282	1,254	1,227	1,200	1,175	1,150	1,126	1,103	1,080	1,058
0,30	1,036	1,015	0,994	0,974	0,954	0,935	0,915	0,896	0,878	0,860
0,40	0,842	0,824	0,806	0,789	0,772	0,755	0,739	0,722	0,706	0,690
0,50	0,674	0,659	0,643	0,628	0,613	0,598	0,583	0,568	0,553	0,539
0,60	0,524	0,510	0,496	0,482	0,468	0,454	0,440	0,426	0,412	0,399
0,70	0,385	0,372	0,358	0,345	0,332	0,319	0,305	0,292	0,279	0,266
0,80	0,253	0,240	0,228	0,215	0,202	0,189	0,176	0,164	0,151	0,138
0,90	0,126	0,113	0,100	0,088	0,075	0,063	0,050	0,038	0,025	0,013

II - Comparaison d'une moyenne observée à une moyenne théorique

-
- **Petits échantillons n<30**

  – Si la distribution de la variable aléatoire suit une **loi normale et la variance est connue** on revient au cas précédant de la loi centrée réduite avec le test Z

  – Z = m -μ_0 / s/$\sqrt{n}$ suit une loi normale centrée réduite N(0,1)

II - Comparaison d'une moyenne observée à une moyenne théorique

- **Petits échantillons n<30**
  - Si la distribution de la variable aléatoire suit une **loi normale** et la **variance est inconnue**

- **Test T de Student**
  - La comparaison de la moyenne m observée sur n cas à une valeur théorique μ_0 est basée sur le rapport : $\frac{\mu - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{m - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$
  - S désigne l'écart type estimé sur l'échantillon

II - Comparaison d'une moyenne observée à une moyenne théorique

- Si |t| est inférieur à la valeur lue dans la table de t (loi de Student) pour ddl = n-1 et le risque 5%, la différence n'est pas significative (ie l'échantillon provient bien de la population au regard de la moyenne);

- Si |t| est supérieur ou égal à la valeur lue dans la table de t (loi de Student) pour ddl = n-1 et le risque 5%, la différence est significative

- Valeur |t| trouvée dans la table de Student pour le risque fixé = degré de signification

II - Comparaison d'une moyenne observée à une moyenne théorique

- La moyenne des notes de statistique en PACES est de 45/ 100 (μ_0)

- Chez 18 étudiants on trouve une moyenne (m) de 54/ 100 avec un écart type (s) de 9
  - Peut on conclure que la moyenne m de cet échantillon est supérieur (test unilatéral) à la moyenne habituelle /théorique μ_0 ?
  - La moyenne m des notes suit une loi normale

II - Comparaison d'une moyenne observée à une moyenne théorique

- Choix du test et vérification des conditions d'utilisation

  – L'échantillon est petit (n<30) mais la moyenne µ suit une loi normale dans la population dont est issue l'échantillon (test unilatéral)

  – La statistique t= $\frac{m - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$ suit une loi normale de 18-1 = 17 dll

II - Comparaison d'une moyenne observée à une moyenne théorique

- Définir H0 et H1
  - H0 : $\mu \leq \mu_0$
  - H1 : $\mu > \mu_0$

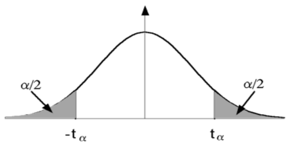
- Fixer le risque alpha et définir la règle de décision
  - On s'intéresse seulement à savoir si $\mu > \mu_0$ donc situation unilatéral
  - Valeur seuil en situation bilatérale t (2.5% , 17 ddl) = 2.11
  - Valeur seuil en situation unilatérale t (5% , 17 ddl) ≥ 1.74
  - Si H1 avait été $\mu < \mu_0$ avec H0 : $\mu \geq \mu_0$
    - Valeur seuil en situation unilatérale t (5% , 17 ddl) ≤ 1.74

II - Comparaison d'une moyenne observée à une moyenne théorique

- Si t = $\dfrac{m - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$ ≥ 1.74 on rejette H0, on accepte H1
- Si t = $\dfrac{m - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$ < 1.74 on ne rejette pas H0

- Calcul de la statistique
  - t= $\dfrac{m - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \dfrac{54-45}{\frac{9}{\sqrt{18}}} = \dfrac{9}{\frac{9}{4.24}} = 4.24$
  - 4.24 (t calculé) ≥ 1.74 (t seuil) on rejette H0, on accepte H1 au risque de 5%
  - Au regard des résultats la moyenne de la population représentée par ces étudiants est supérieure à la moyenne habituelle
  - p < 0,0005 sur la table t de Student unilatéral

TABLE DU t DE STUDENT



ddl \ α	0,45	0,25	0,15	0,10	0,05	0,025	0,01	0,005	0,0005	TU
ddl \ α	**0,90**	**0,50**	**0,30**	**0,20**	**0,10**	**0,05**	**0,02**	**0,01**	**0,001**	**TB**
1	0,158	1,000	1,963	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	636,619	
2	0,142	0,816	1,386	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	31,598	
3	0,137	0,765	1,250	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	12,924	
4	0,134	0,741	1,190	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	8,610	
5	0,132	0,727	1,156	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	6,869	
6	0,131	0,718	1,134	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,959	
7	0,130	0,711	1,119	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	5,408	
8	0,130	0,706	1,108	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	5,041	
9	0,129	0,703	1,100	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,781	
10	0,129	0,700	1,093	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,587	
11	0,129	0,697	1,088	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,437	
12	0,128	0,695	1,083	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	4,318	
13	0,128	0,694	1,079	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	4,221	
14	0,128	0,692	1,076	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	4,140	
15	0,128	0,691	1,074	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	4,073	
16	0,128	0,690	1,071	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	4,015	
17	0,128	0,689	1,069	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,965	
18	0,127	0,688	1,067	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,922	

t = 4.24 unilatéral
donc p < 0.0005

III - Comparaison de 2 moyennes observées sur 2 échantillons indépendants

III - Comparaison de 2 moyennes observées sur 2 échantillons indépendants

- Les données sont non appariées
  - Moyenne sur 2 échantillons indépendants

- Taille de l'échantillon
  - Grands échantillons ≥ 30
  - Petits échantillons <30

- La comparaison entre 2 moyennes observées mA et mB sur nA et nB individus respectivement (promotion PACES de 2 facultés A et B)

III - Comparaison de 2 moyennes observées sur 2 échantillons indépendants

- Test basé sur l'écart réduit dans le cas des grands échantillons ie nA et nB ≥ 30

- $Z = \dfrac{\mu_A - \mu_B}{\sqrt{\dfrac{\sigma_A^2}{n_A} + \dfrac{\sigma_B^2}{n_B}}} = \dfrac{m_A - m_B}{\sqrt{\dfrac{s_A^2}{n_A} + \dfrac{s_B^2}{n_B}}}$

  Ecart type de la différence des moyennes

- S_A^2 et S_B^2 sont les variances estimées sur l'échantillon
- Si $|Z| < 1.96$ la différence n'est pas significative à 5%
- Si $|Z| \geq 1.96$ la différence est significative à 5%
- Le risque Z lu dans la table de l'écart réduit fixe le degré de signification

III - Comparaison de 2 moyennes observées sur 2 échantillons indépendants

- La statistique Z suit par approximation une loi normale centrée réduite

- Exemple on compare la moyenne des notes de statistiques de PACES entre 2 facultés A et B
  - On tire au sort 50 élèves (nA et nB) dans chacune des promotions et on compare la moyenne (note/100)
    - mA = 45/100 (d'écart type s = 3)
    - mB = 49/100 (d'écart type s = 5)

III - Comparaison de 2 moyennes observées sur 2 échantillons indépendants

- Est-ce que la moyenne est différente entre les deux facultés (test bilatéral) ?

- Choix du test et vérification des conditions d'utilisation
  - 2 échantillons de $n \geq 30$
  - Deux variables continues
  - Moyennes mA et mB des notes suivent une loi normale

III - Comparaison de 2 moyennes observées sur 2 échantillons indépendants

- Définir H0 et H1
  - H0 : $\mu A = \mu B$
  - H1 : $\mu A \neq \mu B$

- Fixer le risque alpha et définir la règle de décision
  - Risque bilatéral 5%
  - Rejet de H0 si
    - $|Z| = \left| \frac{\mu_A - \mu_B}{\sqrt{\frac{\sigma A^2}{n_A} + \frac{\sigma B^2}{n_B}}} \right| = \left| \frac{m_A - m_B}{\sqrt{\frac{SA^2}{n_A} + \frac{SB^2}{n_B}}} \right| \geq 1.96$

III - Comparaison de 2 moyennes observées sur 2 échantillons indépendants

- Calcul de la statistique

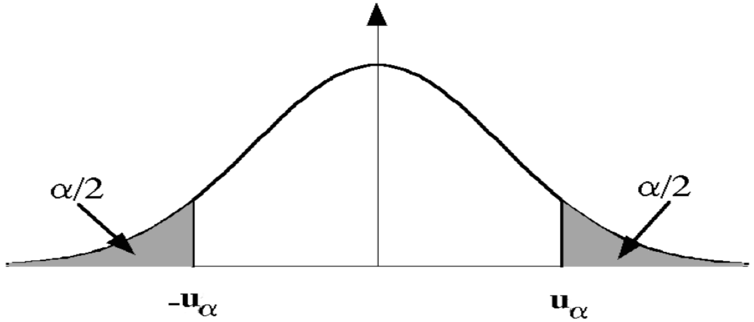
  - $|Z| = |\frac{m_A - m_B}{\sqrt{\frac{SA^2}{n_A}+\frac{SB^2}{n_B}}}| = |\frac{45 - 49}{\sqrt{\frac{3^2}{50}+\frac{4^2}{50}}}| = |\frac{-4}{\sqrt{\frac{9}{50}+\frac{16}{50}}}| =$ 5.66

  5.66 ≥ 1.96 on conclut que les moyennes des notes de PACES diffèrent entre la faculté A et B (ie mB significativement supérieure à mA)

  - p ≤ 0,000 000 1

Loi normale centrée réduite

Table de l'écart réduit

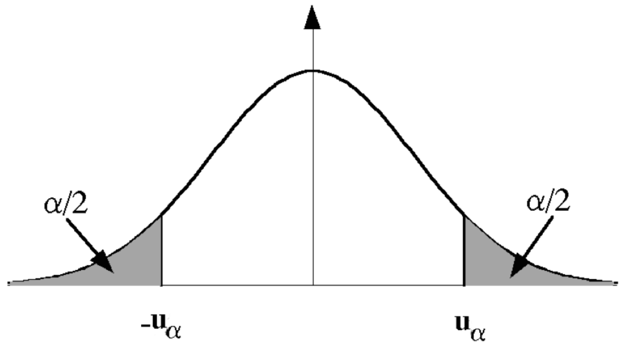


La table donne la probabilité *α* pour que l'écart réduit dépas[illegible], en valeur absolue, une valeur donnée *u*, c'est-à-dire la probabilité de ne pas trouver z dans l'interva[illegible][-u ; u] centré sur 0. Chacune des 2 aires hachurées correspondent à une probabilité égales *α/2*. La p[illegible]abilité d'observer *z* dans l'intervalle]-*u* ; *u*[est évidemment 1- *α*.

Test bilatéral : lire *α* Test unilatéral à droite ou à g[illegible]uche : diviser *α* par 2

α	**0,00**	**0,01**	**0,02**	**0,03**	**0,04**	**0,05**	**0,06**	**0,07**	**0,08**	**0,09**
0,00	∞	2,576	2,326	2,170	[illegible]	1,960	1,881	1,812	1,751	1,695
0,10	1,645	1,598	1,555	1,514	1,476	1,440	1,405	1,372	1,341	1,311
0,20	1,282	1,254	1,227	1,200	1,175	1,150	1,126	1,103	1,080	1,058
0,30	1,036	1,015	0,994	0,974	0,954	0,935	0,915	0,896	0,878	0,860
0,40	0,842	0,824	0,806	0,789	0,772	0,755	0,739	0,722	0,706	0,690
0,50	0,674	0,659	0,643	0,628	0,613	0,598	0,583	0,568	0,553	0,539
0,60	0,524	0,510	0,496	0,482	0,468	0,454	0,440	0,426	0,412	0,399
0,70	0,385	0,372	0,358	0,345	0,332	0,319	0,305	0,292	0,279	0,266
0,80	0,253	0,240	0,228	0,215	0,202	0,189	0,176	0,164	0,151	0,138
0,90	0,126	0,113	0,100	0,088	0,075	0,063	0,050	0,038	0,025	0,013

Table de l'écart réduit



α	0,001	0,000 1	0,000 01	0,000 001	0,000 000 1	0,000 000 01	0,000 000 001
u_α	3,29053	3,89059	4,41717	4,89164	5,32672	5,73073	6,10941

III - Comparaison de 2 moyennes observées sur 2 échantillons indépendants

- Test t de Student dans le cas des petits échantillons ie nA et/ou nB < 30 (au moins l'un est petit)
  - $t = \frac{\mu_A - \mu_B}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n_A}+\frac{\sigma^2}{n_B}}} = \frac{m_A - m_B}{\sqrt{\frac{S^2}{n_A}+\frac{S^2}{n_B}}}$

- S^2 estimation de la variance supposée commune ie **test de l'égalité des variances au préalable**
  - $S^2 = \frac{(nA-1)\times SA^2+(nB-1)\times SB^2}{nA+nB-2} = \frac{\sum(x-mA)^2-\sum(x-mB)^2}{nA+nB-2}$

- Si |t| est inférieur à la valeur lue dans la table de t pour un ddl = $nA + nB - 2$

- **2 hypothèses normalité et égalité de variance** = test t robuste en première approximation

III - Comparaison de 2 moyennes observées sur 2 échantillons indépendants

- Exemple identique au précèdent mais effectif de n_A = 9 et n_B =18

- Exemple on compare la moyenne des notes de statistiques de PACES entre 2 facultés A et B

  – On tire au sort n_A = 9 et n_B = 18 dans chacune des promotions et on compare la moyenne
  – mA = 45/100 (d'écart type $s = 3$)
  – mB = 49/100 (d'écart type $s = 5$)

III - Comparaison de 2 moyennes observées sur 2 échantillons indépendants

- Est-ce que la moyenne est différente entre les deux facultés (test bilatéral) ?

- Choix du test et vérification des conditions d'utilisation
  - 2 échantillons de n < 30
  - Deux variables continues, loi normale, on suppose l'égalité de variance
  - **On doit le faire le test d'égalité des variances test F au préalable (cf chap I)**
  - Moyennes mA et mB des notes suivent une loi normale
  - Statistique t = $\frac{m_A - m_B}{\sqrt{\frac{s^2}{n_A}+\frac{s^2}{n_B}}}$ suit une loi de Student à (9 + 18 -2) = 25 ddl

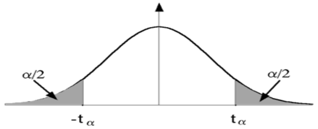
III - Comparaison de 2 moyennes observées sur 2 échantillons indépendants

- Définir H0 et H1
  - H0 : μA = μB
  - H1 : μA ≠ μB

- Fixer le risque alpha et définir la règle de décision
  - Risque bilatéral 5%
  - Rejet de H0 si
    - $t = \frac{m_A - m_B}{\sqrt{\frac{s^2}{n_A} + \frac{s^2}{n_B}}}$

      t (5%, ddl = 25) = 2.06
    - Rejet si |t| > 2.06

TABLE DU t DE STUDENT

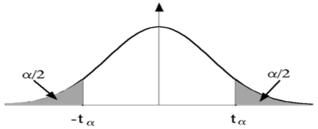


ddl \ α	0,45	0,25	0,15	0,10	0,05	0,025	0,01	0,005	0,0005	TU
ddl \ α	**0,90**	**0,50**	**0,30**	**0,20**	**0,10**	**0,05**	**0,02**	**0,01**	**0,001**	**TB**
1	0,158	1,000	1,963	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	636,619	
2	0,142	0,816	1,386	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	31,598	
3	0,137	0,765	1,250	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	12,924	
4	0,134	0,741	1,190	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	8,610	
5	0,132	0,727	1,156	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	6,869	
6	0,131	0,718	1,134	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,959	
7	0,130	0,711	1,119	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	5,408	
8	0,130	0,706	1,108	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	5,041	
9	0,129	0,703	1,100	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,781	
10	0,129	0,700	1,093	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,587	
11	0,129	0,697	1,088	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,437	
12	0,128	0,695	1,083	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	4,318	
13	0,128	0,694	1,079	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	4,221	
14	0,128	0,692	1,076	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	4,140	
15	0,128	0,691	1,074	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	4,073	
16	0,128	0,690	1,071	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	4,015	
17	0,128	0,689	1,069	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,965	
18	0,127	0,688	1,067	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,922	
19	0,127	0,688	1,066	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,883	
20	0,127	0,687	1,064	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,850	
21	0,127	0,686	1,063	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,819	
22	0,127	0,686	1,061	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,792	
23	0,127	0,685	1,060	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,767	
24	0,127	0,685	1,059	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,745	
25	0,127	0,684	1,058	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,725	

III - Comparaison de 2 moyennes observées sur 2 échantillons indépendants

- Calcul de la statistique
  - $S^2 = \frac{(nA-1)\times SA^2 + (nB-1)\times SB^2}{nA+nB-2} = \frac{\sum(x-mA)^2 - \sum(x-mB)^2}{nA+nB-2} = \frac{(9-1)\times 3^2+(18-1)\times 5^2}{9+18-2} = \frac{72+425}{25}$ =19.88
  - t = $\frac{m_A - m_B}{\sqrt{\frac{S^2}{n_A}+\frac{S^2}{n_B}}} = \frac{45-49}{\sqrt{\frac{19.88}{9}+\frac{19.88}{18}}}$ = -2.20
  - $|t| \geq 2.06$
  - Conclusion on rejette H0 au risque alpha bilatéral de 5%
  - La moyenne des notes de faculté B est supérieure à celle de A ie elle est différente
  - p compris entre 0.05 et 0,02 (table de Student bilateral)

TABLE DU t DE STUDENT



ddl \ α	0,45	0,25	0,15	0,10	0,05	0,025	0,01	0,005	0,0005	TU
ddl \ α	**0,90**	**0,50**	**0,30**	**0,20**	**0,10**	**0,05**	**0,02**	**0,01**	**0,001**	**TB**
1	0,158	1,000	1,963	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	636,619	
2	0,142	0,816	1,386	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	31,598	
3	0,137	0,765	1,250	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	12,924	
4	0,134	0,741	1,190	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	8,610	
5	0,132	0,727	1,156	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	6,869	
6	0,131	0,718	1,134	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,959	
7	0,130	0,711	1,119	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	5,408	
8	0,130	0,706	1,108	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	5,041	
9	0,129	0,703	1,100	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,781	
10	0,129	0,700	1,093	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,587	
11	0,129	0,697	1,088	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,437	
12	0,128	0,695	1,083	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	4,318	
13	0,128	0,694	1,079	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	4,221	
14	0,128	0,692	1,076	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	4,140	
15	0,128	0,691	1,074	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	4,073	
16	0,128	0,690	1,071	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	4,015	
17	0,128	0,689	1,069	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,965	
22	0,127	0,686	1,061	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,792	
23	0,127	0,685	1,060	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,767	
24	0,127	0,685	1,059	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,745	
25	0,127	0,684	1,058	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,725	

p compris entre 0.05 et 0.02 (table du t de Student bilateral avec 2.20 et 25 ddl

III - Comparaison de 2 moyennes observées sur 2 échantillons indépendants

- Remarque
  - **Non avons supposé ici que les variances étaient égales**
  - **En realité, il faut tester cette hypothèse d'égalité des variances**

  - **Si les variances ne sont pas égales et ou si elles les variables ne suivent pas une loi normale**

    - Tests non paramétriques Wilcoxon / Mann et whitney

IV -Comparaison de 2 moyennes observées sur 2 échantillons appariés

IV -Comparaison de 2 moyennes observées sur 2 échantillons appariés

- Les échantillons ne sont pas indépendants
  - 2 examinateurs corrigent les copies de 100 étudiants (ie même échantillon de copie)
  - Les tests précédents ne sont plus valables car ils présupposent l'indépendance des échantillons = ils corrigent les copies des mêmes étudiants

IV -Comparaison de 2 moyennes observées sur 2 échantillons appariés

- Les échantillons appariés avec des effectifs ≥ 30

  – Pour comparer les moyennes de deux échantillons appariés, on forme pour chaque paire la différence des deux mesures ***di*** et on compare la moyenne des n différences di à 0 par l'écart réduit

  – $Z = \frac{\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{m}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$

  – m et S désignent la moyenne et l'écart type estimés sur l'échantillon des n différences

IV -Comparaison de 2 moyennes observées sur 2 échantillons appariés

- Si $|Z| < 1.96$ les moyennes ne diffèrent pas significativement au seuil de 5 %

- Si $|Z| \geq 1.96$ les moyennes différent significativement et le risque correspondant à Z lu dans la table de l'écart réduit fixe le degré de signification

IV -Comparaison de 2 moyennes observées sur 2 échantillons appariés

- Les échantillons appariés avec des effectifs < 30

  – Pour comparer les moyennes de deux séries appariées de faible effectif, on forme pour chaque paire la différence des deux mesures et on compare la moyenne des différences à 0 par le rapport

  – $t = \frac{\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{m}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{m-0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$

  – m et S désignent la moyenne et l'écart type estimés sur l'échantillon des n différences di

  – $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^{n} d_i)^2}{n}}{n-1}$

IV -Comparaison de 2 moyennes observées sur 2 échantillons appariés

- Si |t| est inférieur à la valeur lue dans la table de t pour le nombre de degrés de liberté (n-1) et le risque 5 % les moyennes ne diffèrent pas significativement au seuil de 5 %

- Si |t| est supérieur les moyennes différent significativement et le risque indiqué par la table pour la valeur |t| trouvée fixe le degré de signification

- Formule applicable si la différence est distribuée selon une loi normale

IV -Comparaison de 2 moyennes observées sur 2 échantillons appariés

- On mesure l'effet du stress lié au examen PACES sur la glycémie de 9 étudiants
  - La glycémie suit une loi normale dans la population dont sont issues les étudiants
  - Pour chaque étudiant 2 mesures sont faites avant et après les examens
- Résultats

étudiants	1	2	3	4	5	6	7	8	9
avant	5.5	4.3	6.5	4.5	5.2	4.3	5.0	5.4	5.2
après	5.4	6.7	6.5	6.0	5.2	5.0	4.8	4.7	4.5

- Le stress du à l'examen modifie t il la glycémie des étudiants ?

IV -Comparaison de 2 moyennes observées sur 2 échantillons appariés

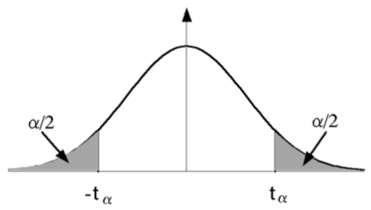
- Choix du test statistique et vérification des conditions d'utilisation
  - Données appariées, un seul échantillon, loi normale
  - Test de la différence à zéro
  - t = $\frac{\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{m}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{m-0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$ suit une loi de Student à 9-1 = 8 ddl

- Définir les hypothèses
  - H0 : $\mu = 0$
  - H1 : $\mu \neq 0$

IV -Comparaison de 2 moyennes observées sur 2 échantillons appariés

- Fixer le risque alpha et définir la règle de décision
  - Alpha 5 % bilatéral
  - Zone de rejet de H0 : 2.306 sur la table de Student à 8 ddl

TABLE DU t DE STUDENT



ddl \ α	0,45	0,25	0,15	0,10	0,05	0,025	0,01	0,005	0,0005	TU
ddl \ α	**0,90**	**0,50**	**0,30**	**0,20**	**0,10**	**0,05**	**0,02**	**0,01**	**0,001**	**TB**
1	0,158	1,000	1,963	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	636,619	
2	0,142	0,816	1,386	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	31,598	
3	0,137	0,765	1,250	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	12,924	
4	0,134	0,741	1,190	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	8,610	
5	0,132	0,727	1,156	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	6,869	
6	0,131	0,718	1,134	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,959	
7	0,130	0,711	1,119	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	5,408	
8	0,130	0,706	1,108	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	5,041	

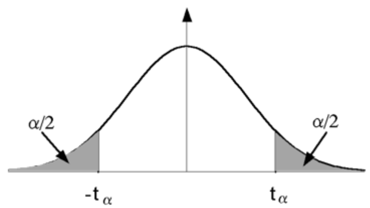
IV -Comparaison de 2 moyennes observées sur 2 échantillons appariés

- Calcul de la statistique

étudiants	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
avant	5.5	4.3	6.5	4.5	5.2	4.3	5.0	5.4	5.2	
après	5.4	6.7	6.5	6.0	5.2	5.0	4.8	4.7	4.5	
di	-0.1	2.4	0	1.5	0	0.7	-0.2	-0.7	-0.7	2.9
di^2	0.01	5.76	0	2.25	0	0.49	0.04	0.49	0.49	9.53

- $S^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} di^2 - \frac{(\sum_{i=1}^{n} d_i)^2}{n}}{n-1} = \dfrac{9.53 - \frac{8.41}{9}}{8} = 1.0744$
- m = 2.9 / 9 = 0.32
- $t = \dfrac{0.32}{\frac{1.036}{\sqrt{9}}} = 0.93$
- p compris entre 0.50 et 0.30

TABLE DU t DE STUDENT



ddl \ α	0,45	0,25	0,15	0,10	0,05	0,025	0,01	0,005	0,0005	TU
ddl \ α	**0,90**	**0,50**	**0,30**	**0,20**	**0,10**	**0,05**	**0,02**	**0,01**	**0,001**	**TB**
1	0,158	1,000	1,963	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	636,619	
2	0,142	0,816	1,386	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	31,598	
3	0,137	0,765	1,250	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	12,924	
4	0,134	0,741	1,190	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	8,610	
5	0,132	0,727	1,156	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	6,869	
6	0,131	0,718	1,134	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,959	
7	0,130	0,711	1,119	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	5,408	
8	0,130	0,706	1,108	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	5,041	

- $t = \dfrac{0.32}{\frac{1.036}{\sqrt{9}}} = 0.93$

IV -Comparaison de 2 moyennes observées sur 2 échantillons appariés

- Appliquer les règles de décisions
  - $t < 2.306$, on ne rejette pas H0 : la différence de glycémie n'est pas différent de zéro

- Conclusion le stress lié aux examens ne semble pas agir sur la glycémie

Conclusion

- Vérifier les conditions d’application des tests:
  - Distribution de la variable
  - Effectifs
  - Indépendance/appariement
- Question à formulée sous la forme d’hypothèses
  - Unilatérale/ bilatérale
- Choisir les bonnes tables statistiques